गणितानंदी कापरेकर

स. पां. देशपांडे

डोंबिवली

मुंबई

महात्मा गांधी जन्मशताब्दी
जादूचा चौरस

०२	१०	१९	६९
६४	२४	१२	००
१६	०१	६३	२०
१८	६५	०६	११

गणितानंदी कापरेकर

स. पां. देशपांडे

अ

अक्षर प्रकाशन

गणितानंदी कापरेकर / स. पां. देशपांडे
Ganitanandi Kaparekar / S. P. Deshpande

पहिली आवृत्ती : १ जानेवारी २००५

मूल्य : ६० रुपये

प्रकाशक
सौ. पूजा सामंत
अक्षर प्रकाशन
कृष्ण निवास
६४, हिंदु कॉलनी
दादर, मुंबई - ४०० ०१४

मुद्रणस्थळ
न्यू एज प्रिंटिंग प्रेस
भूपेश गुप्ता भवन
८५, सयानी रोड
प्रभादेवी
मुंबई - ४०० ०२५

कै. दत्तात्रय रामचंद्र कापरेकर
(१९०५-१९८६)

ज्या चिमखड्यांनी
याचा अभ्यास करायला हवा
त्यापैकी काही –

ईशा, रौनक, मिताली, निधी
.......,

या माझ्या नातवंडांना –

– दादा आजोबा

अनुक्रम

१. कै. द. रा. कापरेकर : जीवन परिचय

२. कापरेकरांच्या गणिती नगरीचा फेरफटका

● कापरेकर स्थिरांक ● आकडे मोडीच्या लघुरीती ● डेम्लोसंख्या ● स्वयंभू संख्या ● संगम संख्या ● द्विमुखी संख्या ● कापरेकर संख्या ● दत्तात्रेय संख्या ● हस्तलाघव संख्या ● रिक्तपद भरण व बहुल रिक्तपद भरणं संख्या ● आंदोलक संख्या ● वानरी संख्या ● हर्षद संख्या ● विजय संख्या ● विच्छेदनीय संख्या ● तिरप्या झेपेच्या संख्या ● श्रीनिवास रामामुजन स्मारक संख्या १७२९

३. संख्यांच्या गमती-जमती

● १०८९ची गंमत ● हस्तलाघव संख्यांची गंमत ● तिरप्या झेपेच्या संख्यांची गंमत ● वाढदिवसाच्या तारखांची गंमत ● घरंगळणाऱ्या ठोकळ्यांचा खेळ ● आंदोलक संख्यांची करामत ● १३ची रंजक वस्तुस्थिती ● त्रोटक गंमती (१-४)

४. संकीर्ण

● कापरेकरतर्किका ● आवर्ती दशांश आवर्तनं

५. जादूचे चौरस-म. गांधी जन्मशताब्दी चौरस

६. कापरेकर जन्मशताब्दी चौरस

मनोगत

आयुष्यभर संख्यांचा ध्यास घेणारे गणिती कै. दत्तात्रय रामचंद्र कापरेकर यांची जन्मशताब्दी १७-१-२००५ रोजी येत असल्याच्या निमित्तानं अ. भा. गणित अध्यापक मंडळाचं वार्षिक अधिवेशन यंदाच्या वर्षी २८, २९ व ३० डिसेंबर २००४ रोजी कापरेकरांच्या कर्मभूमीत-नाशिक इथं बोलावलं गेलं ही औचित्यपूर्ण बाब आहे.

बाळपणापासून कापरेकरांना लागलेल्या संख्यांच्या नादाचं रूपांतर छांदिष्टपणात होऊन ते नित्य नव्या संख्या हुडकण्यात दंग असत. आगगाडीचे डबे, इंजिनं, फार काय प्रवासी तिकीटं यावर कुठंही एखादी संख्या पाहिली की ते तिच्या विचारात गढून जात असत. ह्या आगळ्या वेगळ्या छंदापायीच रोजच्या डोंबिवली-मुंबई या कंटाळणाऱ्या प्रवासात एक दिवस डेम्लो संख्यांच्या रूपानं त्यांच्या हाती मोठंच घबाड लागलं. अर्थातच नंतरचे अनेक महिने ते त्या संख्यांच्या मागं हात धुवून लागले इतके की, त्यातून ह्या विषयावर त्यांचे दोन खंड प्रकाशित झाले! आपल्याला जे गवसलं ते लपवण्याचा कृपणपणा कापरेकरांच्यात नव्हता. किंबहुना हाती लागलेलं गणिती धन तज्ञांना दाखवून त्यांनी संमतीची मान डोलवेपर्यंत कापरेकरांचा जीव भांड्यात पडत नसे. त्यासाठी ते, अ. भा. गणिती अध्यापक मंडळ, भारतीय गणिती सभा, अ. भा. खगोल मंडळ, महाराष्ट्र गणित अध्यापक मंडळ या संस्थांचे आजीव सभासद झाले होते. स्वाभाविकच त्यांच्या वार्षिक अधिवेशनांना ते पंढरीच्या वारकऱ्याच्या निष्ठेनं स्वत:ची पदरमोड करून हजेरी लावीत. उद्देश हा की, आपली नवनिर्मिती तज्ज्ञमंडळींपुढं ठेवावी. मुंबई-चेन्नई-हैद्राबाद, म्हैसूर, लखनौ, अलाहाबाद इत्यादी देशाच्या विविध प्रांतातून आलेल्या विद्वज्जनांना कापरेकर भेटे पर्यंत चैन पडत नसे. इतकंच नव्हे तर, येतांना कापरेकरांनी आपल्यासाठी काय बौद्धिक खाद्य

आणलं आहे, याच्या प्रतीक्षेत ही मंडळी असत. कापरेकरांच्या निर्मितीत हे पंडित वर वर रस घेत नसत तर, त्यावर चर्चा करून, लेख लिहून सुधारणा सुचवीत अथवा त्या तत्त्वावर वेगळा प्रकाश पाडीत असत. शिवाय आपल्या संशोधन संस्था, विद्यापीठ, महाविद्यालयं इथं त्यांना ते सन्मानानं व्याख्यानांना बोलावीत असत. हीच गत मुंबई विद्यापीठीच्या गणित चर्चा मंडळाची (मॅथेमॅटिक्स् कलोक्वियमची). इथंही इतर प्राध्यापकांबरोबर श्रोतृवृंदात हजर असलेले रँ. गुंजीकर, प्रा. द. भ. वाघ हे श्रेष्ठीदेखील त्यांचं म्हणणं शांतपणं ऐकून त्यावर प्रश्न-उपप्रश्न विचारून चर्चेला जिवंतपणा आणीत असत. कापरेकर व्याख्यानं देतानाचं दृश्य व त्यांचे हावभाव पाहण्यासारखे असत. विशेषत: ते जेव्हां एखादा मनोरंजक निष्कर्ष काढीत तेव्हा, त्यांच्या डोळ्यातील चमक आणि, 'किती' आश्चर्यकारक!' हे त्यांचे बालसुलभ उद्गार व त्यांना श्रोत्यांनी टाळ्या वाजवून दिलेली दाद, या साऱ्या गोष्टी ज्यांनी साक्षात अनुभवल्या तो एक भाग्यवान! रँ. गुंजीरकरांच्या शिफारशीमुळंच कापरेकरांचे निबंध मुंबई विद्यापीठाच्या नियतकालिकात छापून आले तसंच त्यांना विद्यापीठानं अनुदानही दिलं!

मुलांच्या संस्कारक्षम वयात त्यांना कापरेकर गणिताच्या अभ्यासाची का आवश्यकता आहे, याचा मागोवा घेतला तर, वरवर जरी ते करमणुकप्रधान वाटलं तरी त्यात जलद आकडेमोडीच्या लघुरीती, विभाज्यतेच्या कसोट्या आणि भिन्न जातीच्या संख्यांचे मनोवेधक आकृतिबंध यामुळं मुलांची विचारशक्ती पल्लवित होण्यास जितकी मदत होणारी आहे तितकीच ती गणिताची भीती दूर करण्यास किंबहुना अवघड वाटणाऱ्या या विषयाची गोडी लावण्यास सहाय्यकारक ठरणारी आहे. तसंच पदवी-पदव्युत्तर स्तरावर गणिताचा खास अभ्यास करणाऱ्या होतकरू तरूणांना कापरेकरांच्या शोधकार्यातून संशोधनाची प्रेरणा घेता येईल. इतकंच नव्हे तर एखाद्या संशोधन विद्यार्थ्यानं कापरेकरांच्या संपूर्ण कामगिरीचा धांडोळा घेऊन त्यावर विचार मंथन करून, त्याला आधुनिक गणितीची जोड देऊन पीएचडीचा प्रबंध विषय म्हणून निवड करण्यासारखी आहे.

'भूमितीत वाकबगार नसणाऱ्यानं आत शिरू नये,' असं ग्रीक तत्त्वज्ञ, प्लेटो यानं आपल्या अकादमीच्या प्रवेशद्वारावर कोरून ठेवलं होतं, असं म्हणतात. तसं अभ्यागतांना निरुत्साही करणारं कोणतंही वाक्य कापरेकरांनी लिहिलं नव्हतं. कारण गणितापासून त्यांनी आयुष्यभर आनंदाचा ठेवा मिळवला; आणि इतरांना त्यांनी आपल्या आनंदात सहभागी करून घेतलं. त्यांच्या ह्या मनोवृत्तीचं द्योतक म्हणूनच त्यांनी आपल्या खोलीच्या दारावर, 'गणितानंद मंडळ' हा चित्तवेधक शब्द समूह लिहिला होता. खरोखर त्यांच्या संपूर्ण आयुष्याचं रहस्यच या अर्थगर्भ शब्दसमूहात दडलेलं आहे, असं म्हटल्यास ते वावगं ठरणार नाही.

कापरेकरांच्या जन्मशताब्दी निमित्तानं, हे पुस्तक पुरं करताना त्यांच्या समग्र कामगिरीचा परामर्श घेतल्याचा लेखकाचा दावा नाही. फक्त त्यांच्या ३०/३५ प्रकाशित कृतींपैकी हाती लागलेल्या ५/६ तुटपुंज्या कृती, अ. भा. गणिती अध्यापक मंडळानं काढलेली त्यांच्या ८०व्या वाढदिवसाप्रसंगीची स्मरणिका आणि 'एमिनंट इंडियन मॅथेमॅटिशियन्स' मालेतलं चवथं पुष्प यातील लेख, हीच लेखकाची शिदोरी. शिवाय कापरेकरांवरील छोटेखानी पुस्तकांवर नजर फिरवून लेखकानं त्यात आलेल्या कापरेकर गणिताची नोंद घेतली.

हा उपक्रम तडीस नेण्यासाठी ज्या सुहृदांनी आपला बहुमोल वेळ मोडून मनापासून सहाय्य केलं त्यात 'वीरमाता जिजाबाई तंत्रशास्त्र संस्थे'तले प्रा. भालचंद्र नाईक व 'होमीभाभा विज्ञान शिक्षण केंद्रा'चे अधिष्ठाता डॉ. हेमचंद्र प्रधान यांचा ऋणनिर्देश न करणं कृतघ्नपणाचं ठरेल. प्रा. नाईक यांच्याइतकी हस्तलिखित वाचून मोलाच्या सूचना करणारी दुसरी सक्षम व्यक्ती शोधून सापडली नसती. तशीच डॉ. प्रधान यांच्यासारखी अधिकारी व्यक्ती पुरस्कार लिहिण्यास मिळाली, हे भाग्यचं! याशिवाय कविश्रेष्ठ शंकर वैद्य, विनायक पै, ठाण्याचे शं. बा. मठ या स्नेह्यांनी व मविपचे कार्यवाह अ. पां. देशपांडे यांनी लेखकाच्या काही विधानांची फोन वरून तत्परतेनं खातरजमा करून दिली. या सर्व हितचिंतकांचा लेखक शतश: ऋणी आहे. तसंच गणितावरील क्लिष्ट पुस्तकाचं मुद्रण व छपाई करणारे 'न्यू एज प्रिंटिंग प्रेस' व 'अक्षर प्रकाशन' यांना धन्यवाद!

स. पां. देशपांडे

बलिप्रतिपदा
१३-११-२००४

पुरस्कार

थोर खगोलशास्त्र योहान केप्लर यांचे एक वचन सुप्रसिद्ध आहे, 'गणित हे सौंदर्याचा आद्य नमुना आहे.' (कै.) श्री. दत्तात्रेय रामचंद्र कापरेकर यांच्यावरच्या, त्यांच्या जन्मशताब्दीनिमित्त माझे ज्येष्ठ मित्र प्रा. स. पां. देशपांडे यांनी लिहिलेल्या, 'गणितानंदी कापरेकर' या पुस्तकात केप्लर यांच्या वचनाचा प्रत्यय वाचकांना पदोपदी येईल.

या पुस्तकात प्रा. देशपांडे यांनी कापरेकर सरांचा जीवनपरिचय थोडक्यात पण प्रभावीपणे करू दिला आहेच, परंतु त्यांच्या गणिती कार्याची सोप्या भाषेत आणि रंजकपणे ओळखही करून दिली आहे. कापरेकर सर हे शालेय गणिताचे शिक्षक; देवळाली येथील एका शाळेत त्यांनी बत्तीस वर्षे (१९३०-६२) गणित शिकवले. शालेय वयातच त्यांना संख्यांशी खेळायची जी गोडी लागली ती त्यांनी आयुष्यभर जोपासली. संख्यांचे अखंड चिंतन करणाऱ्या कापरेकरांना प्रवासात आगगाडीचे डबे, इंजिने, प्रवासाची तिकिटे या सगळ्यांवरील संख्यांतून काहीतरी नवीन दिसे. या त्यांच्या निरीक्षणांतूनच डेम्लो, स्वयंभू, संगम, द्विमुखी, दत्तात्रेय, हस्तलाघव, रिक्तपदभरण, आंदोलक, वानरी, हर्षद, विजय, विच्छेदनीय अशा विविध संख्याप्रकारांचा त्यांनी शोध लावला. त्यांनी संख्याप्रकारांना दिलेली नावेही अर्थपूर्ण आणि कल्पक असत. त्यांनी शोधलेल्या एका संख्याप्रकाराला अन्य गणितज्ञांनी त्यांचेच, 'कापरेकर संख्या' असे, नाव दिले आहे. वेगवेगळ्या संख्या आणि त्यांचे गुणधर्म शोधणे हा त्यांचा छंदच नव्हता, तो त्यांचा व्यवसायच झाला होता. त्यांनी आपल्याला गवसलेले भांडार ३०-३५ पुस्तकांच्या माध्यमाद्वारा जगाला दिले आणि हे करण्यासाठी आपले तन, मन, धन सर्व गणितार्पण केले.

महाराष्ट्रातील, फारशा प्रसिद्ध नसलेल्या, एका शहरी आयुष्यभर शालेय गणित शिकवणाऱ्या या शिक्षकाने आपल्या वेडाने भारतातील गणितज्ञांना भुरळ घातलीच, परंतु 'अमेरिकन मॅथेमॅटिकल मन्थली', 'जर्नल ऑफ रिक्रिएशनल मॅथेमॅटिक्स' अशा गणितावरील, नावाजलेल्या लोकप्रिय नियकालिकात त्यांच्या लेखांना स्थान मिळाले. इतकेच नव्हे तर त्यांच्या लेखांवर अन्य गणिती मंडळींनी लेख लिहिले; त्यांनी शोधलेल्या एक स्थिरांकामुळे, 'कापरेकर स्थिरांकामुळे' त्यांचे नाव भारताबाहेर चांगलेच परिचित झाले. कापरेकरांना जर तरूणवयात पाश्चात्य देशातून गणितातील उच्च शिक्षण घेण्याची संधी मिळाली असती तर नक्कीच एक आंतराष्ट्रीय कीर्तीचे मोठे गणिती म्हणून आपल्याला त्यांचे नाव ऐकायला मिळाले असते.

मी हे पुस्तक वाचायला घेतले, आणि अक्षरश: ते संपेपर्यंत मला चैन पडले नाही. अर्थात हे पुस्तक नुसते वाचायचे नाही; त्यातले गणित समजून घ्यायचे, सोडवायचे आणि त्याची मजा घेत पुढे जायचे. येथे एकामागेमाग एक मनोवेधक आकृतिबंध, त्यांचे स्तिमित करणारे गुणधर्म आणि ते समजून घेण्यासाठी वापरलेल्या सफाईदार रीती येत राहातात; आणि त्यातून केप्लरना प्रतीत झालेले गणिताचे सौंदर्य प्रकट होत राहाते. प्रा. स. पां. देशपांडे यांनी कापरेकर सरांच्या उद्यमाला न्याय देण्यासाठी खूप मेहनत घेतली आहे. माध्यमिक शालेय विद्यार्थ्यांना समजेल अशा पातळीवर, तांत्रिक परिभाषा आणि क्लिष्टपणा टाळून, त्यांनी हे सादरीकरण केले आहे. जरूर तेथे त्यांनी स्वत:ची उदाहरणेही दिली आहेत. हे मोलाचे काम पूर्ण करण्यात त्यांनी वेळेचे, कापरेकर सरांच्या जन्मशताब्दीचे, औचित्यही साधले आहे. प्रा. देशपांडे यांचे आणि हे पुस्तक प्रकाशित करणाऱ्या अक्षर प्रकाशनाचे मन:पूर्वक अभिनंदन करायला हवे.

'गणित' जगलेल्या, गणिताचा आयुष्यभर आनंद घेतलेल्या कापरेकरांवरच्या या पुस्तकाचे शीर्षक 'गणितानंदी कापरेकर' अर्थातच अगदी समर्पक आहे. हे पुस्तक प्रत्येक गणितीप्रेमी व्यक्तीने संग्रही ठेवायला हवे. गणित विषयात पुढे जाऊ इच्छिणाऱ्या, विशेषत: गणित अध्यापक महामंडळाच्या गणित परीक्षांची आणि गणित ऑलिंपिआडांसारख्या स्पर्धापरीक्षांची तयारी करू इच्छिणाऱ्या विद्यार्थ्यांनीही ते अवश्य अभ्यासले पाहिजे. गणिताच्या शिक्षकांकरता तर यात खजिना आहे, तो किती लुटावा असे त्यांना वाटेल. माझ्या मते महाराष्ट्रातील गणित शिक्षकांनीच नव्हे तर सर्व शिक्षकांनी हे पुस्तक अभिमानाने जवळ ठेवायला हवे. आपल्यापैकी एक शिक्षक आपला व्यवसाय निष्ठेने सांभाळूनही अभ्यासू वृत्ती जोपासून किती विलक्षण उंची गाठू शकतो याचे कापरेकर सरांचे हे उदाहरण सर्वांनाच स्फूर्तिदायक आहे. या पुस्तकाचा अन्य भारतीय भाषांत अनुवादही व्हायला हवा; इंग्रजीत तर ते निश्चित यायला हवे. हे पुस्तक शाळाशाळात, घराघरात जावो आणि गणित विषयाच्या सौंदर्याचा, गणित किती आनंददायी असू शकते याचा अनुभव जास्तीत जास्त व्यक्तींना येवो ही शुभेच्छा.

कै. कापरेकर सरांवरील या सुरेख पुस्तकाला पुरस्कार मला लिहायला मिळाला हे मी माझे भाग्यच समजतो. कापरेकर सरांना आदरांजली आणि या पुस्तकाबद्दल लेखक-प्रकाशक यांचे पुन्हा अभिनंदन.

– प्रा. हेमचंद्र प्रधान
होमी भाभा विज्ञान शिक्षण केंद्र
टाटा इन्स्टिट्यूट ऑफ फंडामेंटल रिसर्च
वि. ना. पुरव मार्ग, मानखुर्द
मुंबई - ४०० ०८८

१. दत्तात्रय रामचंद्र कापरेकर : जीवन परिचय

'...दिधले असे जग तये आम्हास खेळावया' या केसवसुतांच्या, 'आम्ही कोण?' कवितेतल्या ओळीवरून कुण्या स्वच्छंदी गणिती खेळियाची प्रकर्षानं आठवण होत असली तर अर्थातच ती श्रीनिवास रामानुजन यांची. त्याच जातकुळीच्या जवळ येणारा, संख्यांचा दुसरा नादी मनुष्य म्हणजे, दत्तात्रय रामचंद्र कापरेकर, हे गेल्या पिढीत होऊन गेलेले देवळालीच्या शाळेतले शिक्षक. कारण, सुमारं ६० वर्ष, संख्या-संख्या आणि संख्या हा श्वासोच्छ्वासा इतकाच त्यांच्या गणिती कार्यजीवनाचा अविभाज्य भाग बनला होता. विविध प्रकारच्या संख्या, त्यांचे गुणधर्म, आकृतिबंध व गमतीदार जादूचे चौरस काढण्यासाठी अहर्निश काम करताना त्यांनी किती वह्या, कागद, चिठ्ठ्या-चपाट्या व शाई खर्ची घातली त्याची गणती करणंच अशक्य आहे. लोकमान्यांचे गुरु केरुनाना छत्रे यांना एकदा एक गणित अडलं होतं. तेव्हा ते सुटेपर्यंत, त्यांच्या जिवाला स्वस्थता कशी ती नव्हती, त्यांना अन्न गोड लागत नव्हतं, तर त्यांच्या डोळ्यांपुढं सतत 'ब्रॅकेटस्---' उभं रहात, असं, केरूनाना, गणितानं कसं झपाटून जात, त्यासंबंधी सुधारकाग्रणी आगरकरांनी त्यांच्या मृत्युलेखात म्हटलेलं आहे. कापरेकरांची संबंध हयात अगदी तशीच सतत गणितानं झपाटलेल्या स्थितीत गेली.

१७ जानेवारी १९०५ रोजी ठाणे जिल्ह्यातल्या डहाणू गावी जन्मलेल्या कापरेकरांचं मॅट्रिकपर्यंतचं शिक्षण ठाणे इथं, रहाणं कधी ठाणे तर कधी डोंबिवलीत. उच्चशिक्षण पुण्यात, १९३० ते १९६२ पर्यंत शालेय शिक्षक म्हणून नाशिक जवळची देवळाली ही कर्मभूमी आणि या जगातला शेवटचा श्वास त्यांनी घेतला तो नाशिकला ४ जुलै १९८६ या दिवशी. असा त्यांचा जीवनपट थोडक्यात मांडता येतो. वामनमूर्ती असलेल्या कापरेकरांचं अंतरंग इतकं गणितमय झालेलं होतं की, त्यांना आपल्या बाह्यांगाकडं लक्ष द्यायला सवडच उरत नसे; हे

त्यांच्या गबाळ्या वेषावरून ध्यानात येई. परंतु त्याची खंत कधी त्यांना वाटली नाही की, ज्यांना त्यांच्या विलक्षण गणिती कौशल्याची भुरळ पडली, त्या त्यांच्या चाहत्यांना. किंबहुना ते दिसतात कसे, यापेक्षा ते व्यासपीठावर आल्यावर आज ते कोणत्या नाविन्यपूर्ण संख्या मांडून आपल्या बुद्धीला काय खाद्य पुरवतात, या कडेच श्रोत्यांचं लक्ष लागलेलं असे.

मुलाचे पाय पाळण्यात दिसतात, असं म्हणण्याचा प्रघात आहे. पण बऱ्याच जणांच्या बाबतीत याचा पडताळा येत नाही. मात्र कापरेकरांबाबत त्यांच्या शाळेतल्या गणू मास्तरांना या म्हणीचा प्रत्यय आला होता. आकड्यांशी खेळण्याचं, गुंतागुंतीच्या गणिती क्रिया पटकन करण्याचं व गणिती कोडी सोडवण्याचं दत्तूचं कसब या चाणाक्ष मास्तरानं तेव्हाच हेरलं होतं. दत्तूचा बालपणीचा हा छंद, छांदिष्टपणा म्हणता येईल एवढा दिवसेंदिवस वाढतच गेला. व्यसनासक्त माणसाला त्या सवयीच्या आहारी गेल्यावर दुसरं काही जसं सुचत नाही तसंच काहीसं संख्यासक्त कापरेकरांचं झालं. परिणामी नाना प्रकारच्या संख्यांची वैशिष्ट्य शोधून काढण्याची त्यांना लागलेली चटक वाढतच गेली आणि ह्या नादापायी ते तासन्तास आकडेमोडीत गुंग होऊन जात असत. इतके कष्ट करून आपल्या कल्पनाशक्तीच्या जोरावर हाती लागलेलं घबाड जिज्ञासूंच्या निदर्शनास आणेपर्यंत कापरेकरांच्या जिवाला चैन पडत नसे. परंतु त्यांनी शोधलेले दोन अंकी संख्यांचे गुणाकार, मूलभूत अंकगणिती क्रियांच्या लघुरीतींबरोबर नव्या जातीच्या संख्या, त्यांचे गुणधर्म व त्यासंबंधी मिळालेले निष्कर्ष जेव्हा ते जाणकारांना दाखवू लागले तेव्हा, 'फारच बाळबोध' अशा शेऱ्यानं त्यांची संभावना होऊ लागली! अशा उद्विग्न मनस्थितीत असताना त्यांना प्रा. मो. ल. चंद्रात्रेय यांच्या रूपानं एक हितचिंतक मिळाला. या गणितज्ञानं मात्र कापरेकरांचं बाड वाचून केवळ तोंडदेखलं कौतुक केलं असं नाही, तर योग्य दिशेनं जाण्यासाठी मार्गदर्शन करून, असंच काम करत रहाण्यासाठी प्रोत्साहन दिलं! अवघ्या १५व्या वर्षी मिळालेल्या या उत्तेजनानं कापरेकरांचा हुरूप वाढला व ते अधिक जोमानं काम करू लागले.

दरम्यान मॅट्रिक झाल्यावर १९२३ साली कॉलेजच्या पहिल्या वर्षासाठी कापरेकरांना डोंबिवली ते मुंबई असा जाता-येताना दररोज ३ तास आगगाडीचा प्रवास करावा लागे. त्यावेळी देखील गप्प न बसता, गाडीचे डबे, इंजिनं - फार काय प्रवासी तिकीटांवरील क्रमांकांवरून त्यांची तीक्ष्ण दृष्टी फिरत असे. संख्यांच्या आहारी जाण्याच्या त्यांच्या या वृत्तीतूनच एके दिवशी त्यांना 'डेम्लो'संख्या स्फुरल्या! नंतर पुण्याच्या फर्गसन कॉलेजातून बीएस्सी होऊन देवळालीच्या

शाळेत रुजू झाल्यावर नोकरीची वेळ सोडून, मिळालेला प्रत्येक क्षण कापरेकरांनी आपल्या संशोधनाच्या कारणी लावला. हळू हळू त्यांच्या पोतडीत चमत्कृतीजन्य संख्या, त्यांचे मनोरंजक गुणधर्म, वाढदिवसाच्या गंमती, जादूचे चौरस इत्यादी बरीच सामग्री जमा होऊ लागली. स्वाभाविकपणं, आपल्या जवळचं ज्ञान दुसऱ्याला देण्याच्या प्राचीन शिकवणुकीनुसार, कापरेकरांनी या सामग्रीवर बसवलेल्या गमतीदार गणितीय करामती शाळेतल्या मुलांसमोर करून दाखवायला सुरूवात केली. ह्या उपक्रमाचा निरनिराळ्या शाळा आणि गणिती वर्तुळात बोलबाला होऊन, असे करमणूकप्रधान कार्यक्रम सादर करायला कापरेकरांना ठिकठिकाणांहून बोलावणी येऊ लागली! त्यांच्या ह्या प्रदर्शनांमुळे झालेला फायदा म्हणजे मनोरंजनाबरोबर मुलांना मूलभूत गणिती क्रिया करण्याच्या सोप्या रीती कळल्यामुळं त्यांच्या मनातली या विषयाची भिती नष्ट होऊन उलट त्यांना त्याची गोडी वाटू लागली.

आश्चर्य म्हणजे ज्या फर्गसन कॉलेजात कापरेकरांनी गणिताचं शिक्षण घेतलं तिथंच १९३४ साली रँ. ग. स. महाजनींच्या अध्यक्षतेखाली त्यांना गणिताच्या अभ्यासकांपुढं आपलं नवं संशोधन सादर करण्याची संधी मिळाली. प्रा. मो. ल. चंद्रात्रेय यांच्या पुढाकारानं ठरलेला हा कार्यक्रम इतका यशस्वी झाला की दोन्ही गणितज्ञांनी मोकळ्या मनानं कापरेकरांना शाबासकी दिली आणि पुढंही असंच काम चालू ठेवण्यासाठी आशिर्वाद दिला. यापेक्षा महत्त्वाची बाब म्हणजे, इंडियन मॅथेमॅटिकल सोसायटीच्या वार्षिक सभेत जाऊन तिथल्या विद्वानांपुढं संशोधन मांडण्याची महाजनींनी त्यांना स्फूर्ती दिली. त्यानुसार १९३८च्या लखनौ अधिवेशनापासून स्वतःची पदरमोड करून कापरेकर एखाद्या वारकऱ्यांच्या निष्ठेनं सालोसाल या गणिती मेळाव्याला हजेरी लावून त्या त्या वर्षी त्यांना गवसलेले शोध आमसभेसमोर ठेवू लागले अन् त्यांच्या ह्या उपक्रमाचं स्वागत होऊन देशाच्या भिन्न प्रांतातून आलेले हे थोर गणिती त्यांच्या कार्यात रस घेऊन चर्चा करू लागले. इतकंच नव्हे तर ह्या संशोघनाचा पाया मजबूत व्हावा म्हणून कापरेकरांना आपलेपणानं मार्गदर्शन करू लागले. अशा त्यांच्या हितचिंतकांपैकी वानगीदाखल, पी. एल्. भटनागर, हंसराज गुप्ता, बी. एस्. माधवराव, डी. एस्. कोठारी, वेंकटरमण, के. रामचंद्र, एस्. श्रीनिवासन या काही समकालीन नामवंतांचा उल्लेख अप्रस्तुत ठरणार नाही. यावरून कापरेकरांचा वावर किती वरच्या थरातल्या मंडळींत होता, ते आपल्या लक्षात येतं.

अशाच प्रकारं, 'मॅथेमॅटिक्स् स्टुडंण्टस,' 'सायन्स् टुडे' या भारतीय आणि 'स्क्रिप्टा मॅथेमॅटिका,' 'अमेरिकन मंथली मॅगाझिन,' 'जर्नल ऑफ् रिक्रिएशनल

मॅथेमॅटिक्स्' या अमेरिकी नियतकालिकांतून कापरेकरांच्या संशोधनाला प्रसिद्धी मिळू लागल्यावर, तिकडे त्यांच्या कार्याचा बोलबाला झाला. परिणामी एच. हॅस, जी. डी. प्रिशेट, ए. एल. लुडिंग्टन, ए. मॅकोवस्की, के. बी. स्टोलारस्की, मार्टिन गार्डनर, सॅम्युअल याटस्, चार्ल्स विनॅन्स् या पाश्चात्त्य गणितीलेखकांनी त्यांच्या शोधकार्यावर लेख लिहिले. हा कापरेकरांचा झालेला बहुमान निश्चितच, अभिमानास्पद आहे. यापैकी मार्टिन गार्डनर यांनी, 'अमेरिकन मंथली'त म्हटलं आहे की, 'कापरेकर स्थिरांका'मुळं कापरेकर भारताबाहेर चांगलेच परिचित झालेले आहेत.' तसंच त्यांनी शोधलेल्या 'स्वयंभू संख्या' असामान्य स्वरूपाच्या आहेत. असंच, ''कापरेकरांचं गणिततातलं योगदान बहुमोल आहे. कारण त्याला रंजनाची झालर आहे. जादूगार ज्याप्रमाणं नजरबंदी करून प्रेक्षकांचं लक्ष आपल्यावर खिळवून ठेवतो त्याप्रमाणं कापरेकर आपल्या कौशल्याच्या बळावर प्रेक्षकांना आपल्या करामतींकडं आकर्षून घेतात... त्यांच्या कार्यक्रमांमुळं किशोरवयीन श्रोत्यांना गणिताची गोडी लागून त्यांच्या मनात त्या विषयाची आस्था निर्माण करण्याचा हेतू साध्य होतो... असामान्य गणितज्ञांची सर्जकता तारुण्यात बहरलेली पण वृद्धावस्थेत तिच्यात तितका जोम न राहिल्याचं आपण ऐकतो. पण कापरेकरांच्या बाबतीत वृद्धावस्थेत ७५व्या वर्षीदेखील तितक्याच उत्साहानं सर्जनशीलता चालू आहे...'' सॅम्युअल याटस्नं म्हटलं आहे. या आणि अशा अनेक पाश्चात्त्य लेखकांनी कापरेकरांचा ज्या पद्धतीनं गौरव केला त्यावरून ह्या मंडळींना कापरेकरांचं काम किती मोलाचं वाटलं ते कळतं.

या परिचयात्मक लेखात कापरेकरांच्या समग्र कार्याचा परामर्श घेण्याची कल्पना नसल्यामुळं त्यांच्या ठळक कामाची इथं नोंद करू. त्यात त्यांना डोंबिवली-मुंबई प्रवासात गवसलेल्या डेम्लो संख्यांची प्रथम दखल घ्यायला हवी. पुढं त्यांनी या संख्यांचा पद्धतशीर विकास करून 'डेम्लो नंबर्स' खंड १, हे ११४ पानांचं स्वतंत्र पुस्तक १९४८ व खंड २ नंतर प्रसिद्ध केले. असाच भिन्न जातींच्या संख्यांचा सतत पाठपुरावा करताना 'स्वयंभू' संख्या, त्यातून पुढं 'संयोग' संख्या २५५२ प्रमाणं उलटसुलट कशीही लिहिली-वाचली तरी तीच येणारी द्विमुखी संख्या, वानरी संख्या, बोटांची अदलाबदल करून येणारी हस्तलाघव संख्या, दत्तात्रेय संख्या, आंदोलक संख्या, कापरेकर संख्या अशा निरनिराळ्या प्रकारच्या संख्या उजेडात आणून मग त्यांच्या रचना, गुणधर्म व गमतीजमती अभ्यासकांपुढं ठेवल्या. करमणूकप्रधान गणितात कापरेकरांनी हाताळलेला सर्वाधिक लोकप्रिय झालेला प्रकार म्हणजे जादूच्या आकृत्या. त्यात ३ x ३, ४ x ४, ५ x ५चे चौरस, षटकोन, अष्टकोन, पंचकोनी चांदणी अशा आकृत्यांत

भरलेल्या आकड्यांची बेरीज, एकापेक्षा अधिक वेळा निरनिराळ्या तऱ्हेने घेऊन एकच येते. विशेषतः कोपर्निकस, रँ. परांजपे, लो. टिळक, म. गांधी यांच्या अनुक्रमे ५००व्या, ८६व्या आणि १००व्या वाढदिवसांचे रचलेले जादूचे चौरस आपल्याला चक्रावून टाकणारे असून त्यात भरलेल्या आकड्यांची बेरीज २०/२२ प्रकारांनी केली तरी शेवटी तेच उत्तर येतं! याशिवाय जादूगाराजवळ जसे रंगीत चेंडू, पत्ते वगैरे साहित्य असतं तसंच मुडपलेल्या टाचण्या, घरंगळणाऱ्या पेट्या, फिरत्या तबकड्या इत्यादी साधनांच्या मदतीनं ते मुलांना रिझवतात असा भास झाला तरी, जादूगाराप्रमाणं हातचलाखीनं प्रेक्षकांच्या डोळ्यात धूळ फेकण्याचा त्यांचा उद्देश नसे तर एखादी गणिती कृती अथवा तत्त्वं श्रोत्यांच्या गळी शिताफीनं उतरवण्याचा असे. शालेय पातळी व्यतिरिक्त कापरेकरांना आपल्या संशोधनावर व्याख्यानं देण्यासाठी महाविद्यालयं, मुंबई विद्यापीठाचं गणित चर्चा मंडळ, इतर विद्यापीठं, संशोधन संस्था इथून आमंत्रण येत असत.

काही संख्या किंवा गणिती क्रिया कापरेकरांना कशा योगायोगानं मिळाल्या त्याचा अचंबा वाटतो व ते समजून आपल्याला मौज वाटते. उदाहरणार्थ, १९२२ साली दत्तजयंतीला खालापूरच्या वडिलार्जित घरी रात्रीच्या वेळी कंदील लावून ते आकडेमोडीत गर्क होते. इतक्यात त्यांच्या मागल्या भिंतीवरील खुंटीला फडक्यात बांधून अडकवलेलं पोळ्यांचं गाठोडं त्यांच्या कागदावर टपकन् पडलं आणि एक उंदीर इकडून तिकडं पळाला. त्याच वेळेस बराच काळ डोक्यात घोळत असलेल्या

७७७ x ५५ = ५५५ x ७७
५५५५ x ४४४ = ४४४४ x ५५५
१४१४१४१४ x २७२७ = २७२७२७२७ x १४१४

या गुणाकारांमागची संगती त्यांच्या डोळ्यांपुढं लकाकली. ज्या क्षणी ही उकल झाली त्याची आठवण म्हणून या प्रक्रियेला कापरेकरांनी 'मूषक उड्डाण उपपत्ती' असं नाव दिलं! आणि पुन्हा अशा काही नव्या कल्पना या पवित्र दिवशी सुचतील म्हणून इ.स. १९६४ पर्यंत दरसाल ते दत्तजयंतीला खालापूरला श्रद्धेनं जात असत!

अशाच प्रकारं, ३१ मे १९२४ रोजी कापरेकर एका झाडाखाली बसले असताना ९१ x ८१९ या जोडीवरून त्यांच्या मनात आश्चर्यकारक गुणाकारांची कल्पना आली. त्यावरून ९१ व ८१९शी सांगड घालणाऱ्या पुढील संख्यांचे गुणाकार त्वरित काढता येऊ लागले :

जसे : ९१ x ८१९ = ७४५२९

९९०१ x ९८०१९९ = ९७०४९५०२९९

किंवा ९९९००१ x ९९८००१९९९ = ९९७००४९९५००२९९९

वरील जोड्यांच्या गुण्य, गुणक व गुणाकारातल्या अंकाआधी व दरम्यान योग्य इतके ९ व शून्य एक आड एक घालून मिळालेल्या संख्याचे गुणाकार ९१ x ८९१च्या ७४५२९ या गुणाकारानं असेच ९ व शून्य एकआड एक घालून त्वरित उत्तरं काढता येतात. या निर्मितीची देखील स्मृती म्हणून व पुन्हा काही नवं सुचेल म्हणूनही १९२४ नंतर सलग २० वर्षं भोळे भाबडे कापरेकर त्या झाडाखाली जाऊन बसत असत आणि भाविकपणं त्या झाडाखालची माती उकरून झालेल्या खळग्यात एक पैशाचं नाणं पुरून टाकीत असत!

एखाद्या दृश्याची अथवा घटनेची अनुभूती घेऊन लेखक, कवी किंवा चित्रकार जसा आपल्या प्रतिभेच्या बळावर स्वत:च्या कलाकृतीच्या माध्यमातून परिणामकारक आविष्कार करू शकतो, अगदी तसाच अनुभव कापरेकरांच्या बाबतीत येत असे. एखादी संख्या पाहिली की,

दिक्कालातुनी आरपार अमुची दृष्टी पहाया शके ।

या, पुन्हा केशवसुतांच्या त्याच कवितेतल्या चरणाची प्रचीती येत असे. म्हणजे असं की, त्यांची दृष्टी त्या संख्येच्या आरपार जाऊन काही तरी नवं लेणं घेऊन येत असे. उदारणार्थ, १७२९ या रामानुजनसंख्येवर, तिची ६ भिन्न प्रकारे फोड करून कापरेकरांनी जो प्रकाश टाकला त्यावरून वरील विधानाची सत्यता पटेल.

'वेष असावा बावळा परी अंगी नाना कळा' या संत रामदासांच्या उक्तीचं मूर्तीमंत उदाहरण असलेल्या कापरेकर नावाच्या अवलियानं उणीपुरी ६०/६५ वर्षं आपल्या शिक्षकी पेशाच्या तुटपुंज्या प्राप्तीत आजन्म गणिताला वाहून घ्यावं, ही अद्भुत घटना म्हणावी लागेल. मात्र त्यांच्या या परिश्रमांचं खास असं चीज झाल्याचं ऐकिवात नाही. नाही म्हणायला, १९२७ साली, विद्यार्थीदशेत, 'परिस्पर्शकाची उपपत्ती' (थियरी ऑफ एन्व्हलप्स) या विषयावर त्यांनी लिहिलेल्या निबंधाला रँ. परांजपे पारितोषिक मिळालं होतं आणि मुंबई व पुणे विद्यापीठांनी प्रत्येकी २ वर्षं, तर विद्यापीठ अनुदान मंडळानं सेवानिवृत्तीनंतर त्यांच्या गुणवत्तेचा आदर करून दिलेलं ५ वर्षांचं, अशी अनुदानरूपानं त्यांची कदर झाल्याचे उल्लेख त्यांच्या चरित्रात आढळतात. बाकी त्यांची उपेक्षाच झाली असं नाईलाजानं

म्हणावं लागतं. कारण स्वत:च्या पदराला खार लावून त्यांनी प्रकाशित केलेल्या ३५/४० पुस्तिकादेखील कुठंच एक गठ्ठा सापडत नाहीत. त्यांच्या बाबतीतली ही उदासीनता मन विषण्ण करणारी आहे.

सारांश, 'शून्यामाजी वसाहती वसविल्या...' या केशवसुतांच्याच अर्ध्या चरणात चपखल बसणारे कापरेकर, यदाकदाचित पाश्चात्य देशात जन्मले असते तर, त्यांचा अनेक अंगांनी बहुमान झाला असता. इतकंच नव्हे तर, त्यांच्या स्मरणार्थ एखाद्या विद्यापीठात गणिताचं अध्यासनदेखील निर्माण केलं गेलं असतं. इतकं, संख्या प्रणालीच्या क्षेत्रात, त्यांचं कार्य मोलाचं आहे. परंतु आतापर्यंत आपल्या देशात, विशेषत: महाराष्ट्र राज्यात, असं काही न घडल्याचं पाहून खंत करण्याशिवाय आपल्या हातात दुसरं काय आहे?

२. कापरेकरांच्या गणिती नगरीचा फेरफटका

प्रास्ताविक

आता कापरेकरांच्या गणिती नगरीत आपण जो फेरफटका मारणार आहोत त्यावेळी आपल्याला जागोजाग थांबून त्यांच्या प्रत्येक गणित कृतीचं बारकाईनं अवलोकन करून तिच्या मागचं तत्त्व समजून घ्यायचं असलं तर, त्या लेखनाचा खूपच विस्तार होईल आणि विवेचनाची क्लिष्टता वाढेल, इतकं त्याचं कार्य विपूल आहे. शिवाय या पुस्तकाची मर्यादा लक्षात घेता आपल्याला एवढं महत्त्वाकांक्षी होता येणार नाही. तेव्हा आपल्या मनाला मुरड घालून इथं, कापरेकरांच्या समृद्ध गणिती भांडारातून, काही प्रातिनिधिक विषय नमुन्यादाखल घेऊन त्यांच्या कार्याचे ठळक टप्पे दाखवायचं ध्येय डोळ्यांसमोर ठेवू.

त्यासाठी पुढील काही विषय निवडले आहेत.

१) आकडेमोडीच्या लघुरीती

२) कापरेकर स्थिरांक

३) कापरेकरांनी शोधलेल्या काही संख्या :
(अ) स्वयंभू संख्या (आ) संगम संख्या (इ) डेम्लो संख्या
(ई) कापरेकर संख्या (उ) दत्तात्रय संख्या : ......

४) संख्यांसंबंधींच्या गमती जमती : ......

५) जादूचे चौरस

थोडक्यात, आपल्या प्राचीन संस्कृतीनुसार गंगेच्या विशाल पात्रातलं, आपल्या ओंजळीत मावेल इतकं गंगाजल घेऊन आपण सूर्याला अर्घ्य देताना पुन्हा ते पवित्र पाणी गंगेलाच समर्पण करतो, त्याप्रमाणं कापरेकरांच्याच संचितातून

स्पष्टीकरणसाठी काही नमुने घेऊन त्यांनाच त्यांच्या जन्मशताब्दीप्रसंगी नम्रपणं समर्पण करू.

पुस्तकाअखेर त्यांना अभिवादन करण्यासाठी, प्रस्तुत लेखकानं तयार केलेला, 'कापरेकर जन्मशताब्दी चौरस' दिलेला आहे.

● कापरेकर स्थिरांक ६१७४

६१७४ हा स्थिरांक किंवा अविकाराक (इन्व्हेरियंट) प्रथम १९४६ साली शोधून काढल्याचं स्वतः कापरेकर यांनी, 'द न्यू कॉन्स्टंट ६१७४' ह्या १९५९ साली प्रसिद्ध केलेल्या पुस्तिकेच्या प्रस्तावनेत म्हटलं आहे.

हा स्थिरांक काढण्यासाठी कापरेकरांनी जी रीत दिली आहे ती अशी :

कोणतीही चारअंकी संख्या घेऊन 'उलट क्रम वजाबाकी (रिव्हर्स सबट्रॅक्शन प्रोसेस)' प्रक्रियेनं ६१७४ हा स्थिरांक काढता येतो. याला ४४४४ सारख्या चारही अंक समान असणाऱ्या संख्यांचा मात्र अपवाद करावा लागतो. परंतु ५३८८, ७४७६ आणि ५४५५ अशा दोन किंवा तीन अंक समान असणाऱ्या संख्या घेतल्या तरी चालतात.

'उलट क्रम वजाबाकी' प्रक्रिया करण्यासाठी प्रथम दिलेली संख्या उतरत्या क्रमानं लिहिली पाहिजे. मग ती उलट क्रमानं मांडून जी नवीन संख्या मिळते ती उतरत्या क्रमानं लिहिलेल्या संख्येतून वजा घालवायची. (अर्थात दोहोपैकी जी मोठी, तिच्यातून लहान संख्या वजा केली पाहिजे). ६१७४ हा स्थिरांक येईपर्यंत ही प्रक्रिया वारंवार करावी लागते. तो किती पायऱ्यात येईल ते सांगता येत नाही. पण त्यासाठी जास्तीत जास्त अथवा त्यापेक्षा कमी पायऱ्यात तो येतो, असं कापरेकर म्हणतात. हेच स्पष्टीकरण समजण्यास सोपं जावं म्हणून पायऱ्यांच्या रूपानं खाली लिहू :

पायरी १ : कोणतीही चार अंकी संख्या घ्या.

पायरी २ : अंकांच्या उतरत्या क्रमानं ती लिहा.

पायरी ३ : उतरत्या क्रमानं लिहिलेली संख्या आता उलट क्रमानं मांडा.

पायरी ४ : दुसऱ्या व तिसऱ्या पायरीतली लहान संख्या मोठ्या संख्येतून वजा करा.

वरील रीत पुढील उदाहरणांवरून अधिक स्पष्ट होईल.

उदा. १ : सर्व अंक भिन्न

पायरी १ : ४८३९ दिलेली संख्या
पायरी २ : ९८४३ उतरता क्रम लावून
पायरी ३ : ३४८९ उलट्या क्रमानं लिहून
पायरी ४ : ९८४३-३४८९ पायऱ्या २ आणि ३ मधील संख्यांची वजाबाकी.
= ६३५४

ही नवीन संख्या घेऊन ६१७४ हा स्थिरांक येईतो ही प्रक्रिया पुन्हा पुन्हा करावी लागत असल्यामुळं समजण्यास सुकर जावं म्हणून ही संपूर्ण प्रक्रिया कोष्टकाच्या रूपात पुढील प्रमाणं मांडू :

स्तंभ १ **दिलेली किंवा शेवटच्या स्तंभात आलेली संख्या**	**२** **उतरत्या क्रमानं मांडून**	**३** **उलट क्रमानं लिहून**	**४** **स्तंभ २ वजा स्तंभ ३ करून**
४८३९	९८४३	३४८९	९८४३-३४८९ = ६३५४
६३५४	६५४३	३४५६	६५४३-३४५६ = ३०८७
३०८७	८७३०	०३७८	८७३०-०३७८ = ८३५२
८३५२	८५३२	२३५८	८५३२-२३५८ = ६१७४

इथं, ६१७४ हा इष्ट स्थिरांक **चौथ्या** पायरीत मिळाला.

उदा. २ : दोन अंक समान

आता फक्त कोष्टक रूपानंच हे गणित करू.

स्तंभ १ **दिलेली किंवा शेवटच्या स्तंभात आलेली संख्या**	**२** **उतरत्या क्रमानं मांडून**	**३** **उलट क्रमानं लिहून**	**४** **स्तंभ २ वजा स्तंभ ३ करून**
७८७५	८७७५	५७७८	८७७५-५७७८ = २९९७
२९९७	९९७२	२७९९	९९७२-२७९९ = ७१७३
७१७३	७७३१	१३७७	७७३१-१३७७ = ६३५४
६३५४	६५४३	३४५६	६५४३-३४५६ = ३०८७
३०८७	८७३०	०३७८	८७३०-०३७८ = ८३५२
८३५२	८५३२	२३५८	८५३२-२३५८ = ६१७४

इथं, ६१७४ हा इष्ट स्थिरांक **सहाव्या** पायरीत मिळाला.

उदा. ३ : तीन अंक समान

स्तंभ १ **दिलेली किंवा शेवटच्या स्तंभात आलेली संख्या**	**२** **उतरत्या क्रमानं लिहून**	**३** **उलट क्रमानं मांडून**	**४** **स्तंभ २ वजा स्तंभ ३ करून**
४५५५	५५५४	४५५५	५५५४-४५५५ = ०९९९
०९९९	९९९०	०९९९	९९९०-०९९९ = ८९९१
८९९१	९९८१	१८९९	९९८१-१८९९ = ८०८२
८०८२	८८२०	०२८८	८८२०-०२८८ = ८५३२
८५३२	८५३२	२३५८	८५३२-२३५८ = ६१७४

इथं, **पाचव्या** पायरीत ६१७४ स्थिरांक येतो.

अभ्यास : आता सरावासाठी ११०० ही दोन्ही अंक दोनदा आलेली संख्या घेऊन स्थिरांक काढा. किती पायऱ्या लागतात?

उदा. ४ : खुद्द स्थिरांक ६१७४ ही दिलेली संख्या घेऊ

६१७४	७६४१	१४६७	७६४१-१४६७ = ६१७४

एकाच पायरीत येतो.

निरीक्षण : चारही नमुना उदाहरणात शेवटच्या स्तंभात वजा करून आलेली संख्या ९च्या विभाज्यता कसोटीला उतरते. म्हणजे त्या प्रत्येक संख्येला ९नं नि:शेष भाग जातो.

आता कापरेकरांनी, काही अटी पुऱ्या करणाऱ्या संख्यांबाबत एकाच पायरीत स्थिरांक मिळतो, असं सांगितलं आहे. त्याचा पडताळा घेण्यासाठी, अशा संख्या कोणत्या व त्या घेऊन एका पायरीत उत्तर कसं काढता येतं, ते पाहू.

(१) दिलेल्या चार अंकी संख्येत येणारे सर्व अंक क्रमवार विषम किंवा क्रमवार सम असतील तर स्थिरांक पाहिल्याच पायरीला मिळतो.

उदा. १	९७५३	३५७९	९७५३-३५७९ = ६१७४
२	८६४२	२४६८	८६४२-२४६८ = ६१७४
३	१३५७	७५३१	७५३१-१३५७ = ६१७४
४	६४२०	०२४६	६४२०-०२४६ = ६१७४

असाच एका पायरीत स्थिरांक मिळण्यासाठी कापरेकरांनी आणखीन एक नियम सांगितला आहे.

(२) दिलेली संख्या उतरत्या क्रमानं लिहिल्यावर, डावीकडून उजवीकडं जाताना जर तिच्या लागोपाठच्या अंकातले फरक ३, २, १; ४, २, ० अथवा हेच उलट क्रमानं म्हणजे १, २, ३; ०, २, ४ आले तर स्थिरांक एका पायरीत येतो.

आपसातल्या अंकाच्या या फरकांना कापरेकर **आंतर फरक** (इंट्रा डिफरन्स्) असं म्हणतात.

उदा. १ : ९४३६ ही संख्या ९६४३ अशी उतरत्या क्रमानं लिहिल्यावर

९-६ = ३; ६-४ = २; ४-३ = १

असे या संख्येचे ३, २, १ हे आंतर फरक येतात. तेव्हा पाहू या काय होतं ते –

९४३६ ९६४३ ३४६९ ९६४३-३४६९ = ६१७४

उदा. २ : ८५२७ ही संख्या ८७५२ अशी उतरत्या क्रमानं लिहिल्यावर

८-७ = १; ७-५ = २; ५-२ = ३

म्हणजे इथं, आंतर फरक १, २, ३ येतात. तेव्हा

८५२७ ८७५२ २५७८ ८७५२-२५७८ = ६१७४

४२० चा चमत्कार!

वर उल्लेख केलेली ४, २, ० आणि ०, २, ४ ही आणखीन एक आंतर फरकांची जोडी घेऊन असाच एका पायरी स्थिरांक येतो.

उदा. ३ : ३५३९ ही संख्या उतरत्या क्रमानं ९५३३ अशी मांडू. मग

९-५ = ४; ५-३ = २; ३-३ = ० करून

४, २, ० हे आंतर फरक येतात. तेव्हा

३५३९ ९५३३ ३३५९ ९५३३-३३५९ = ६१७४

यास कापरेकरांनी ४२०ची गंमत! म्हटलं असून १९५५ साली बनारस-हल्लीचं वाराणशी-इथं झालेल्या अ.भा.गणितीय परिषदेत त्यांनी हे गुपीत प्रथम उघड केलं. यावरून ४२० आणि ६१७४ अविकारक यांच्यातला महत्त्वाचा

संबंध स्पष्ट होतो. जेव्हा या परिषदेत विवेचनाच्या संदर्भात कापरेकरांनी ४२०चा उच्चार केला तेव्हा उपस्थित श्रोत्यांच्यात एकच खळबळ माजली! आणि मौजेचा भाग म्हणजे त्यानंतर दर वर्षीच्या अधिवेशनात ४२०ची ही गंमत आठवून प्रतिनिधी एकमेकांची करमणूक करून घेत असत!

उदा. ४ : ६२८८ ही संख्या उतरत्या क्रमानं ८८६२ येते.
तेव्हा, ८-८ = ०; ८-६ = २ आणि ६-२ = ४
म्हणजे, ०, २, ४ हे आंतर फरक मिळतात.

आता,

६२८८ ८८६२ २६८८ ८८६२-२६८८ = ६१७४

असं, इथंसुद्धा एकाच पायरीत उत्तर येतं.

● आकडेमोडीच्या लघुरीती

अनेक वर्षं मुलांना शिकवून आलेल्या अनुभवातून संख्या आणि त्यांच्यावर मूलभूत गणिती क्रिया करताना होणारी गुंतागुंत आणि मुलांची होणारी परवड पाहून, अंकगणितीय आकडेमोड फार जलद करता यावी म्हणून, कापरेकरांनी बऱ्याच लघुरीती हुडकून काढल्या आणि त्या '१० लघुरीती (१० कट्स)' या मथळ्यानं, १७ जानेवारी १९३५ रोजी, आपल्या ३०व्या वाढदिवशी प्रसिद्ध केल्या. नंतर त्यात आणखीन ३ रीतींची भर घालून 'आकडेमोडीतल्या १३ लघुरीती (१३ कट्स इन् कॅलक्युलेशन्स्)' नावानं १९५५ साली प्रकाशित केल्या.

त्यापैकी काही रीती इथं पाहू.

१) एकं स्थानी ५ असणाऱ्या संख्यांचे वर्ग

ही लघुरीत बऱ्याच जणांना आतापर्यंत परिचित झालेली आहे. म्हणून फार त्रोटकपणानं त्याला स्पर्श करू.

उदाहरणार्थ, ३५चा वर्ग हवा आहे. त्यासाठी ५चा वर्ग करून उत्तरातले शेवटचे २५ हे अंक मिळवा. नंतर दशं स्थानातल्या ३चा त्याच्या पुढच्या क्रमवार संख्येशी म्हणजे ४शी गुणाकार करा. तो येतो ३ x ४ = १२. हा आकडा २५च्या मागं ठेवा म्हणजे

$(३५)^२ = (३ \times ४)\ (५)^२ = १२२५$

असा ३५चा वर्ग चटकन मिळतो.

अशाच प्रकारे,

$(८५)^२ = (८ x ९) (५)^२ = ७२२५$

$(१०५)^२ = (१० x ११) (५)^२ = ११०२५$

$(९९५)^२ = (९९ x १००) (५)^२ = ९९००२५$

$(२९९५)^२ = (२९९ x ३००) (५)^२ = ८९७००२५$

असे झटपट वर्ग काढता येतात.

याची बैजिक सिद्धता देताना कापरेकरांनी दशं स्थानचा अंक x मानल्यास खरोखर ती संख्या (१०x + ५) येते असं नमूद केले आहे. मग त्याचा वर्ग करून $(१०x + ५)^२ = १००x (x + १) + २५$

असा विस्तार केल्यावर

$(३५)^२ = (१० x ३ + ५)^२ = १०० x ३ (३ + १) + २५$

$= १२०० + २५ = १२२५$

या बैजिक सिद्धतेमुळं, वरील रीतीत दशं स्थानच्या अंकाचा पुढील क्रमवार अंकाशी का गुणाकार करायचा, ते आपल्या ध्यानात येतं.

२) दशं स्थानातील अंक समान व एकं स्थानच्या अंकांची बेरीज १० येते, अशा दोन संख्यांचा गुणाकार

म्हणजे, २३ x २७; ८४ x ८६, ७१ x ७९ इत्यादी संख्यांचे.

रीत : एकं स्थानच्या अंकांचा गुणाकार करून त्याच्यामागं दशं स्थानातल्या समान अंकाचा पुढील क्रमवारं संख्येशी गुणाकार करून आलेली संख्या लिहा.

उदा. १ : २३ x २७

एकं स्थानच्या अंकांचा गुणाकार ३ x ७ = २१

दशं स्थानच्या २चा ३ ह्या २ x ३ = ६

पुढील क्रमवार संख्येशी गुणाकार

∴ २३ x २७ = ६२१

उदा. २ : ८४ x ८६ = (८ x ९) (४ x ६) = ७२२४

उदा. ३ : ७१ x ७९

इथं, एकं स्थानचा गुणाकार १ x ९ = ९

७चा ८ या पुढील ७ x ८ = ५६

क्रमावार संख्येशी गुणाकार

मग वरील रीतीनं, ७१ x ७९ = ५६९, हे उत्तर बरोबर आहे का?

ते समजण्यासाठी, गुण्य-गुणकांच्या जवळचा ७० x ८० हा गुणाकार केला तर, आपल्याला आपली चूक कळून येईल.

७० x ८० = ५६००, असा चार आकडी गुणाकार येतो.

अर्थातच ७१ x ७९चं उत्तरही ४ आकडी असलं पाहिजे. त्यावर उपाय म्हणून एकं स्थानांचा गुणाकार

१ x ९ = ९ असा न घेता तो ०९ घेणं आवश्यक आहे.

म्हणजे, ७१ x ७९ = ५६०९ असं अचूक उत्तर मिळेल.

टीप : एकं स्थानी १ व ९ असतील तेव्हा त्यांचा गुणाकार कटाक्षानं ०९ घ्यावा.

या रीतीचा विस्तार करून दोनापेक्षा अधिक अंकी संख्यांचे गुणाकार करता येतात. जसे :

उदा. ४ : २२४ x २२६ = (२२ x २३) (४ x ६) = ५६६२४

उदा. ५ : ४९१ x ४९९ = (४९ x ५०) (१ x ९) = २४५००९

उदा. ६ : ९९३ x ९९७ = (९९ x १००) (३ x ७) = ९९००२१

उदा. ७ : २९९९२ x २९९९८ = (२९९९ x ३०००) (२ x ८) = ८९९७०००१६

हवं तर नेहमीच्या वेळखाऊ रीतानं वरील कृतीचा पडताळा घ्यावा.

टीप : इथंसुद्धा, (अ + ब) (अ + क), जिथं ब + क = १० घेऊन, विस्तार करून कापरेकर बैजिक सिद्धता दाखवतात.

वैदिक गणिताचे उद्गाते श्रीशंकराचार्य आणि कापरेकर यांच्या रीतीतील साम्य :

कापरेकरांनी दिलेल्या आकडेमोडीच्या १३ लघुरीती आणि पुरीच्या गोवर्धन पीठाचे जगद्गुरू श्रीशंकराचार्य स्वामी भारती कृष्णतीर्थ (१८८४-१९६०) यांच्या 'वैदिक गणित' ग्रंथातल्या रीती यात विलक्षण साम्य आढळतं. उदाहरणार्थ, कापरेकरांनी एकंस्थानी ५ असणाऱ्या संख्याचे वर्ग काढण्याची आणि शंकराचार्यांनी त्याचसाठी 'एकाधिकेन पूर्वेण' सूत्रावर आधारलेली या दोन्ही रीती सारख्याच

आहेत. (पहा : **वेदिक मॅथेमॅटिक्स्,** पुनर्मुद्रण १९८२, पा. ३४). तोच प्रकार दहं स्थानी समान अंक व एकंस्थानाच्या अंकांची बेरीज १० असणाऱ्या दोन संख्यांच्या गुणाकाराच्या रीतींचा. ह्या गुणाकारासाठी स्वामींनी, 'अन्त्ययोर्दशकेऽपि' म्हणजे, शेवटच्या अंकांची बेरीज १० आली तरी, हे सूत्र दिलेलं आहे.

खरोखर ५ शेवटचा अंक असणाऱ्या संख्येचा वर्ग करणं ही बाब म्हणजे, एकं स्थानच्या अंकांची बेरीज १० आणि दहंस्थानी तोच अंक असणाऱ्या दोन संख्या (वस्तुतः एकच संख्या गुण्य-गुणक अशी दोनदा)चा गुणाकार आहे, हे स्वामीजींनी नमूद केलेलं आहे.

स्वामीजी व कापरेकर यांनी आपल्या कार्यासाठी भारतात खूप भ्रमंती केलेली आहे. उभयतांच्या जीवन कार्याचा काळ काहीसा आगं मागं असला तरी उमेदीचा काळ समान होता. तेव्हा या उभयतां गणितज्ञांची कधी भेट झाली होती का? कापरेकरांनी स्वामींच्या कार्यातून अथवा ते समाधिस्थ झाल्यावर १९६५ साली प्रसिद्ध झालेल्या त्यांच्या 'वेदिक गणित' ग्रंथावरून स्फूर्ती घेतली होती का? असे काही प्रश्न पडतात. पण ते अनुत्तरितच रहाणार?

३) तीन किंवा त्यापेक्षा जास्त अंकी ज्या दोन संख्यांचा शेवट ७५ आणि २५नं होतो आणि दशं स्थानामागचा अंक समान आहे, अशा संख्यांचा गुणाकार

उदा. २७५ x २२५, ८७५ x ८२५, ११७५ x ११२५

रीत : प्रथम ७५ x २५ = १८७५ काढून घ्यायचा.

नंतर, शतं स्थानच्या समान अंकाचा पुढील क्रमवार अंकाशी

२ x ३ = ६ असा गुणाकार करून, आलेले ६, १८७५च्या मागं लिहायचे. म्हणजे –

उदा. १ : २७५ x २२५ = ६१८७५

उदा. २ : ८७५ x ८२५ = (८ x ९) (७५ x २५) = ७२१८७५

उदा. ३ : ११७५ x ११२५ = (११ x १२) (७५ x २५) = १३२१८७५

उदा. ४ : ६९९७५ x ६९९२५ = (६९९ x ७००)(७५ x २५) = ४८९३००१८७५.

ही रीत शक्य झाली. कारण ७५ + २५ = १००.

अशीच १०० बेरजेची, ३३७ x ३६३ अशी जोडी घेतली तरी या सूत्रानं गुणाकार करता येतो.

(३३७ x ३६३) = (३ x ४) (३७ x ६३) ∵ ३७ + ६३
= १२१२३३१ = १००

पण, ३७ x ६३ हाच गुणाकार करणं क्लिष्ट म्हणून अशा संख्यांनी शेवट होणाऱ्या संख्याकरता ही रीत वापरणं योग्य ठरणार नाही.

४) दोन किंवा दोहोपेक्षा जास्त अंकी परंतु ७, ८, ९ने शेवट होणाऱ्या संख्यांचे वर्ग

याचा अर्थ, ६७, ७८, ४९, २०७, ११८, ३३९ अशांचे वर्ग काढता येतील.

रीत : प्रथम एकं स्थानची वर्गसंख्या काढा. तिच्यातला एकं स्थानचा अंक लिहून घेऊन हातचा लक्षात ठेवा. (नोंद करा, हवं तर) मग ह्या हातच्यानं, दशं स्थानचा अंक एकनं वाढवून त्यास गुणा. ह्या गुणाकाराचा एकं स्थानचा अंक आधी लिहिलेल्या अंकामागं लिहा. त्यात आलेला हातचा, दशं स्थानच्या अंकाचा पुढील क्रमवार संख्येशी गुणाकार करून आलेल्या उत्तरात मिळवा. हा गुणाकार पहिल्यांदा लिहिलेल्या दोन अंकांच्या मागं (डावीकडं) लिहा. जसे :

उदा. १ : (६७)^२

स्पष्टीकरण

पायरी १ : एकं स्थान ७चा वर्ग म्हणजे
(७)^२ = ४९, पैकी ९ लिहू (i) ४ हातचा

पायरी २ : दशं स्थानी ६ त्यात १ मिळवून मागच्या ४ हातच्यानं गुणूं
(६ + १) ४ = २८, पैकी ८ लिहू (ii) २ हातचा

पायरी ३ : शेवटी दशं स्थानी ६ची पुढील क्रमवार संख्या ७
∴ ६ x ७ = ४२

त्यात पायरी २ मधील, २ हातचा मिळवू.
∴ ४२ + २ = ४४ (iii)

आता, (i),(ii),(iii) ह्या उजवीकडून डावीकडं लिहून उत्तर काढू.
(६७)^२ = ४४८९.

प्रत्यक्ष पडताळा घ्या.

उदा. २ : (२९९)^{२}, दोहोपेक्षा जास्त अंक
इथं, (९)^{२} = ८१, १ लिहू (i) ८ हातचा
२९ ही मागची संख्या
∴ (२९ + १) x ८ = २४०, ० लिहून (ii) २४ हातचा
शेवटी, (२९ x ३०) + २४ = ८९४ (iii)
आता, (i), (ii), (iii) क्रमात उजवीकडून डावीकडं लिहून,
(२९९)^{२} = ८९४०१, हे उत्तर मिळतं.

उदा. ३ : (५०८)^{२}, ३ अंकी संख्या
इथं, (८)^{२} = ६४, ४ लिहू (i), ६ हातचा
मागची संख्या ५०
∴ (५० + १) x ६ = ३०६, ६ लिहू (ii), ३० हातचा
शेवटी, (५० x ५१) + ३० = २५५० + ३० = २५८० (iii)
आता, (i), (ii), (iii) क्रमानं उजवीकडून डावीकडं लिहिल्यावर,
(५०८)^{२} = २५८०६४, हे उत्तर.

५) ३७ नं एखादी मोठी संख्या विभाज्य की नाही ते ठरवणं.

यासाठी दिलेल्या मोठ्या संख्येचे उजवीकडून डावीकडं तीन-तीन अंकाचे गट करून त्यांची बेरीज करा. ही बेरीज तीन वेळा पुन्हा पुन्हा एकच अंक असलेली आली तर ती संख्या ३७नं विभाज्य. जसे :

१२३२१ चे ०१२ हे दोन भाग करून बेरीज केली.
 ३२१
 ३३३ बेरजेत तिन्ही अंक समान
∴ ३३३ ला ३७ नं भाग जातो.

थोडक्यात, १११,२२२,३३३, ---- ९९९ अशी बेरीज आली की ती संख्या ३७ नं विभाज्य.

उदाहरणार्थ, २१०४३५२३८ ११६

इथं, ११६ + २३८ + ४३५ + २१० = ९९९

∴ ३७ नं भाग जातो.

३७ नं भाग जाणाऱ्या संख्या ओळखण्याची ही कसोटी आहे.

६) दिलेल्या मुद्दलाचं दर साल दर शेकडा दिलेल्या दरानं (अ) २ वर्षांचं (ब) ३ वर्षांचं चक्रवाढ व्याज काढणं.

रीत : (अ) व्याज दराचा वर्ग करा. या वर्गामागं दिलेल्या व्याजदराची दुप्पट करून लिहा. या संख्यामागं दशांश चिन्हं द्या.

हे १ रुपयाचं २ वर्षांचं व्याज येतं. या व्याजाला दिलेल्या मुद्दलानं गुणा. म्हणजे इच्छित मुद्दलाचं २ वर्षांचं चक्रवाढव्याज मिळतं.

उदा. द.सा.द.शे. ६ दरानं ५०० रुपयांचं २ वर्षांचं चक्रवाढ व्याज काढा.

पायरी १ : दराचा वर्ग (६)^{२} = ३६
पायरी २ : दराची दुप्पट ६ x २ = १२
पायरी ३ : १ रुपयाचं २ वर्षांचं = .१२३६ चक्रवाढ व्याज
पायरी ४ : ५०० रुपयांचं २ वर्षांचं = ५०० x ०.१२३६
चक्रव्याढ व्याज = ६१.८०

टीप : $A = P\left(१+\frac{r}{१००}\right)^{n}$ या सूत्रानं $A = ५००\left(१+\frac{६}{१००}\right)^{२}$

$\text{रास} = \text{मुद्दल}\left(१+\frac{\text{दर}}{१००}\right)^{\text{मुदत}}$ = ५०० x (१.०६)^{२}
= ५०० x १.१२३६
= ५६१.८

∴ व्याज = A - P
= ५६१.८ - ५००
= ६१.८

(ब) ३ वर्षांचं चक्रवाढ व्याज :

रीत : दराचा घन करा. मग दराच्या वर्गाला ३नं गुणा. त्यानंतर त्याच दराला ३नं गुणा. मग या सगळ्या संख्या क्रमानं उजवीकडून डावीकडं अशा लिहा की, त्यांची एकं स्थानं वरच्या ओळीतल्या तिसऱ्या अंकाखाली येतील. तिन्हींची बेरीज करून सर्वात डावीकडं दशांश चिन्हं द्या. हे १ रुपयाचं ३ वर्षांचं चक्रवाढ व्याज. याला मुद्दलानं गुणिले की इष्ट चक्रवाढ व्याज मिळते.

उदाहरणार्थ, ५०० रुपयांचं ४ दरानं ३ वर्षांचं चक्रवाढ व्याज काढा.

पायरी १ : (व्याजदर)^३ = (४)^३ = ०६४

पायरी २ : ३ (व्याजदर)^२ = ३(४)^२ = ०४८

पायरी ३ : ३ (व्याजदर) = ३ x ४ = १२

यांची बेरीज = ०६४
०४८
१२
१२४८६४

या मागं दशांश देऊन १ रुपयाचं
३ वर्षांचं चक्रवाढ व्याज = .१२४८६४

∴ ५०० रु. ४% दरानं = ५०० x ०.१२४८६४
३ वर्षांचं चक्रवाढ व्याज = ६२.४३२

● डेम्लो संख्या

काही मुलं आगगाड्या, आगबोटी किंवा विमानांसारख्या प्रवासी वाहनात जन्मल्याच्या बातम्या अधूनमधून आपल्या वाचनात येतात. पण घटकाभर करमणूक, यापेक्षा आपण त्यांना अधिक महत्त्व देत नाही. मात्र जी माता अशा बाळाला जन्म देते तिला, किंवा मोठेपणी त्या अपत्याला ही घटना निश्चितच रोमांचकारी वाटते. डेम्लो संख्यांचा शोध ही घटना अशीच रोमांचकारक आहे. कारण १९२३ साली रोजच्या डोंबिवली-मुंबई प्रवासात केव्हा तरी आगगाडीच्या डब्यात कापरेकरांच्या या संख्यांचा जन्म झाला! म्हणून त्यांच्याभोवती एक आगळं वलय आहे.

संख्यांचं अखंड चिंतन करणाऱ्या कापरेकरांचं ह्या प्रवासात आगगाडीचे डबे, इंजिनं, प्रवासी तिकीटं इत्यादींवरील संख्यांकडं लक्ष गेलं नसतं तरच नवल. असं, सूक्ष्म निरीक्षण करण्याच्या जगावेगळ्या नादातूनच, एक दिवस १६५, १६६५, ३७७७४, ३२९६७ अशा सर्वस्वी निराळ्या गुणधर्मांच्या संख्या त्यांच्या डोळ्यांपुढं उभ्या राहिल्या. ह्या जातीच्या संख्येचं वैशिष्ट्य म्हणजे, डावीकडून उजवीकडं जाताना तिच्या अंकांचे, डावा (L), मधला (M) आणि उजवा (R) असे तीन गट पाडता येतात.

व्याख्या : ज्या संख्येच्या अंकांचे L, M, R हे तीन अंकगट असे पडतात की, डाव्या टोकाचा गट L आणि उजव्या टोकाचा गट R यांची बेरीज (L + R) केल्यावर वारंवार येणारा अंक, M या मधल्या गटात असतो, तिला डेम्लो संख्या म्हणतात.

पुढील उदाहरणांवरून ही व्याख्या स्पष्ट होईल.

क्रम	संख्या	L	R	M = L + R	M मधील अंकाची वारंवारता
१	१६५	१	५	६ = १ + ५	एकदा
२	१६६५	१	५	६ = १ + ५	दोनदा
३	३७७७४	३	४	७ = ३ + ४	तीनदा
४	३२९६७	३२	६७	९९ = ३२ + ६७	एकदा
५	३७१११७४	३७	७४	१११ = ३७ + ७४	तीनदा
६	२४३१	२४	३१	५५ = २४ + ३१	शून्य
७	७२६५९४	७२	५९४	६६६ = ०७२ + ५९४	एकदा

टीप :

१. L व R ची बेरीज करून येणारा अंक, M मध्ये एक किंवा अधिक वेळा येतो किंवा अजिबात नसतो सुद्धा, पहा क्रम ६.

२. मधल्या M गटात येणारा अंक १ किंवा १ पेक्षा मोठा पण ९ किंवा ९ पेक्षा लहान असला पाहिजे. समजा हा अंक x मानला तर, हेच विधान, १ ≤ x ≤ ९, असं थोडक्यात चिन्हस्वरूपात मांडता येतं.

३. L व R मध्ये सामान्यपणे समान अंक असतात. एखाद्यावेळी डाव्या गटात मात्र एक अंक कमी असला तर त्याजागी ० (शून्य) घालून L + R बेरीज करावी. पहा क्रम ७.

डेम्लो संख्यांचे लघुरूप : वर दिलेल्या उदाहरणातून Mच्या जागी एकच अंक अधिक वेळा येऊ शकतो, हे आपण पाह्यलं. अशा वेळी डेम्लो संख्या थोडक्यात लिहिण्यासाठी वारंवार येणारा हा अंक एकदाच कंसात घालून त्या कंसाबाहेर तो किती वेळा येतो ते सांगणारा अंक लिहिण्याचा रिवाज आहे. पहा :

N = १६६५ = १ (६)$_२$ ५, (६)$_२$ चा अर्थ ६६

३७७७४ = ३ (७)$_३$ ४, (७)$_३$ = ७७७

९४६६६६५७२ = ९४ (६)$_४$ ५७२, (६)$_४$ = ६६६६

२४३१ = २४ (५)$_०$ ३१, (५)$_०$ = ५ गैरहजर किंवा लुप्त

डेम्लो संख्यांचे प्रकार : कापरेकरांनी डेम्लो संख्यांचे १२ प्रकार दिले आहेत. त्यापैकी आपल्याला सहज कळतील अशा काहींची नोंद करू :

(अ) मधला गट M अजिबात नसला किंवा संपूर्ण वगळलेला असला तर, तिला मध्यमपदलोपी डेम्लो संख्या (कॉम्प्लिमेंटरी डेम्लो नंबर) म्हणतात.

उदाहरणे : (i) N = १४, L = १, L + R = १ + ४ = ५ पण L व R दरम्यान ५ मुळीच येत नाही.

(ii) N = २३७६, L = २३, R = ७६, L + R = ९९, पण M मध्ये ९ येत नाही.

(ब) जेव्हा L व R दोन्ही गैरहजर असतील तेव्हा ती एकरेषीय डेम्लो संख्या (लिनियर डेम्लो नंबर) म्हणून ओळखली जाते.

उदाहरणार्थ, N = (४)$_३$ = ४४४, N = (९)$_२$ = ९९

(क) L, M, R हे तिन्ही गट अस्तित्वात असून M मध्ये वारंवार येणारा अंक असतो तिला द्विपद डेम्लो संख्या (बायनरी डेम्लो नंबर) म्हणतात. पहा :

(i) N = २४ ९९७५ = २४ (९)$_२$ ७५

(ii) N = ३४ ७७७ ४३ = ३४ (७)$_३$ ४३

(ड) L मध्ये १, २, ३, --- ९ पैकी १ पासून सुरू झालेले काही अंक, तर ९, ८, --- ३, २, १ असे उलट क्रमानं येणारे तितकेच अंक R मध्ये असून मध्ये L + M बेरजेमुळं पुन्हा पुन्हा आलेला अंक अर्थातच M मध्ये असतो, अशा संख्येला आश्चर्यकारक डेम्लो संख्या (वंडर डेम्लो नंबर) म्हणतात.

पहा : १२३४४४४४३२१ = १२३(४)$_५$ ३२१

डेम्लो संख्या कशी मिळवता येते?

पुढं वर्णन केलेल्या विशिष्ट रीतींनी डेम्लो संख्या काढण्याचा कापरेकरांनी मार्ग दाखवला आहे.

(१) कोणत्याही N संख्येस, (१०^० + १०^१ + १०^२ + १०^३---) असे १०चे कितीही घातांक घेऊन केलेल्या बेरजेनं गुणिल्यास डेम्लो संख्या मिळते.

परंतु, १०^० + १०^१ + १०^२ + १०^३ --- = (१ + १० + १०० + १००० + ---) = ११११...

याचा अर्थ N ला ज्या संख्येनं गुणायचं तिचा प्रत्येक अंक (कितीही वेळा येणारा) फक्त १ असेल.

उदाहरणार्थ, २७९ (१०^० + १०^१ + १०^२ + १०^३) = २७९ (११११)

नेहमी प्रमाणं हा गुणाकार	२७९
	२७९०
	२७९००
	१७९०००
	३०९९६९

केल्यावर, ३०९९६९ = ३० (९)$_२$ ६९, ही डेम्लो संख्या मिळते.

हाच गुणाकार	२ ७ ९	२ ७ ९	डावीकडून
उजवीकडून	२ ७ ९	२ ७ ९	उजवीकडं
डावीकडं	२ ७ ९	२ ७ ९	
	२ ७ ९	२ ७ ९	
	३ ० ९ ९ ६ ९	३ ० ९ ९ ६ ९	

असा उतरत्या पायऱ्यांनी आंशिक गुणाकार मांडून – म्हणजे प्रत्येक पुढच्या ओळीत लिहायचा २७९ वरच्या ओळीत लिहिलेल्या २७९ पेक्षा एक घर डावीकडं सरकवून लिहायचा – त्यांची बेरीज करून जी डेम्लो संख्या येते ती विकर्णन (डायगोनलायझेशन) किंवा डेम्लोकरण (डेम्लायझेशन) रीतीनं येते, असं कापरेकर म्हणतात. वर दाखवल्याप्रमाणं, २७९ संख्येकरिता डावीकडून उजवीकडं किंवा उजवीकडून डावीकडं अशी जरी विकर्णन रीतीनं मांडणी केली तरी उत्तर तेच येतं.

परंतु २७९ सारखी एकच संख्या न घेता समान अंतराची गणित श्रेढी घेतली तर या बेरजा भिन्न येतात. पहा :

२ ३ २	२ ३ २
२ ३ ६	२ ३ ६
२ ४ ०	२ ४ ०
२ ४ ४	२ ४ ४
२ ७ ० ५ ९ २	२ ५ ८ २ ४ ४

या दोन्ही डेम्लो संख्या नाहीत. मात्र या उत्तरांची बेरीज केली तर, २७०५९२ + २५८२४४ = ५२८८३६ = ५२(८)$_{२}$ ३६ अशी डेम्लो संख्या मिळते.

आता, ९ समान अंतराच्या गणिती श्रेढीत इतकी पदं घेऊ की तिचं शेवटचं पद पहिल्या पदातल्या संख्येत अंकांची अदलाबदल करून येईल. मग दोन्ही प्रकारच्या विकर्णन पद्धतीनं बेरीज घेऊन काय होतं, ते पाहू.

३ ६	३ ६
४ ५	४ ५
५ ४	५ ४
६ ३ ...पहिल्याचा उलटक्रम	६ ३
६ ८ ८ ८ ६	४ १ १ ० ३

या दोन्ही डेम्लो संख्या नाहीत. पण – ६८८८६ + ४११०३ = १०९९८९ = १०(९)$_{२}$८९, डेम्लो संख्या.

अशीच ९९ समान अंतराची ३ अंकी संख्यांची गणित श्रेढी घेतली.

१ २ ५	१ २ ५
२ २ ४	२ २ ४
३ २ ३	३ २ ३
४ २ २	४ २ २
५ २ १	५ २ १
५ ६ ६ ६ ६ ६ ५	१ ५ १ १ ० ४ १

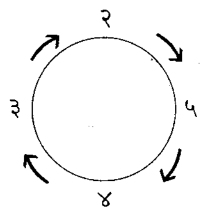
आणि, ५६६६६६५ + १५११०४१ = ७१७७७०६ = ७१ (७)$_{३}$ ०६ ही डेम्लो संख्या मिळते.

(२) दिलेल्या कोणत्याही संख्येच्या दोन्ही टोकांच्या समान अंकांची

अदलाबदल करून आलेली नवीन संख्या दिलेल्या संख्येतून वजा केली असता डेम्लो संख्या मिळते. उदाहरणार्थ,

(i)	७८२४५	दिलेली संख्या
	५८२४७	टोकाचे अंक बदलून
वजा करून	१९९९८	= १(९)$_{३}$ ८ डेम्लो संख्या
(ii)	४३५६२१७	दिलेली संख्या
	१७५६२४३	टोकाचे दोन अंकी गट बदलून
	२५९९९७४	= २५(९)$_{३}$ ७४, डेम्लो संख्या.

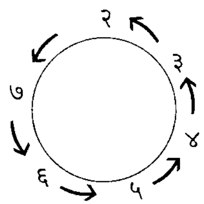
(३) चक्रीय प्रक्रिया : इथं कोणत्याही संख्येचे अंक वर्तुळाच्या परीघावर घड्याळ्याच्या काट्यांच्या दिशेनं अथवा त्यांच्या उलट लिहिल्यावर, प्रत्येक अंकापासून आरंभ करून मूळ संख्येत जितके अंक तितक्या संख्या लिहून त्या सर्वांची बेरीज घेतली असता डेम्लो संख्या मिळते.



उदाहरण (i) २ ५ ४ ३ हे अंक वर्तुळ परीघावर लिहून चार संख्या चक्रीय क्रमानं काढल्या

५ ४ ३ २
४ ३ २ ५
३ २ ५ ४
२ ५ ४ ३
१५ ५ ५ ४

या प्रक्रियेनं, १५५५४ = १(५)$_{३}$ ४, ही डेम्लो संख्या आली.



उदाहरण (ii) २ ३ ४ ५ ६ ७
आता हे अंक प्रतिघटि दिशेनं घेऊन चक्रीय क्रमानं ६ संख्या काढल्या –

४ ३ २ ७ ६ ५
३ २ ७ ६ ५ ४
२ ७ ६ ५ ४ ३
७ ६ ५ ४ ३ २
६ ५ ४ ३ २ ७
५ ४ ३ २ ७ ६
२ ९ ९ ९ ९ ९ ७ = २(९)$_{५}$ ७, ही डेम्लो संख्या आली.

(४) समान अंक असलेल्या कोणत्याही दोन A आणि B संख्या घेतल्या. त्यांचे ९, ९९, --- चे पूरक काढून त्यांना अनुक्रमे C व D म्हणू. मग

$A \times B + B \times C + C \times D + D \times A + A + B + C + D = ९९९...$

उदा. १ : जर A=७, B=५ तर C=२, D=४ $\because$ ९-७=२ इत्यादी.

$\therefore$ AB = ३५, BC = १०, CD = ८ आणि DA = २८

$\therefore$ AB + BC + CD + DA + A+B+C+D

$= ३५ + १० + ८ + २८ + ७ + ५ + २ + ४ = ९९ = (९)_{२}$

उदा. २ : जर A=१५, B=२३ तर C=८४, D=७६; C, D ९९चे पूरक

$\therefore$ A x B = ३४५, B x C = १९३२, C x D = ६३८४, D x A = ११४०

$\therefore$ AB + BC + CD + DA + A+B+C+D

$= ३४५ + १९३२ + ६३८४ + ११४० + १५ + २३ + ८४ + ७६$

$= ९९९९ = (९)_{४}$

टीप : ९ची पुनरावृत्ती A व B मधील अंकसंख्येवर अवलंबून असते. वरील उदाहरण १ मध्ये, A व B एकअंकी तर त्याचे उत्तरात ९ दोनवेळा आणि उदाहरण २ मध्ये, A व B दोनअंकी म्हणून त्या उत्तरात ९ चार वेळा. म्हणजे A, Bच्या अंकसंख्येच्या दुप्पटवेळा ९ येतो.

(५) आवर्ती दशांश : N अविभाज्य संख्या अथवा दोन किंवा तीन अविभाज्य संख्यांचा गुणाकार असून त्याच्या आवर्ती दशांश व्यस्तांकाला $(\frac{1}{N})$ N नं गुणिले असता (म्हणजे, $\frac{1}{N} \times N$) डेम्लो संख्या मिळते.

पहा : (i) $\frac{१}{७}$ = ०.१४२८५७ इथं, आवर्ती भाग १४२८५७

हा आवर्ती भागंच, $१४२८५७ = १४२(९)_{०}\ ८५७$ असा मध्यमपद लोपी डेम्लो संख्येच्या रूपात लिहिता येतो. कारण १४२ + ८५७ = ९९९ पण ९ तर कुठंच येत नाही.

$\therefore १४२८५७ = १४२(९)_{०}\ ८५७$ ही मध्यमपद लोपी डेम्लो संख्या

आणि, $\frac{१}{७} \times ७ = १४२८५७ \times ७$

$= ९९९९९९ = (९)_{६}$, एकरेषीय डेम्लो संख्या.

(ii) $\frac{१}{१३}$ = ०.०७६ ९२३, आवर्ती भाग ०७६९२३.

हा आवर्ती भाग, $०७६९२३ = ०७६(९)_{०}\ ९२३$, मध्यमपद लोपी डेम्लो संख्या. कारण, ०७६ + ९२३ = ९९९, पण ९ येत नाही.

पुढं, $\frac{१}{१३} \times १३ = ०७६९२३ \times १३ = ९९९९९९ = (९)_{६}$ एकरेषीय डेम्लो संख्या.

या संदर्भात केवळ $\frac{1}{N}$ चाच विचार न करता, $\frac{M}{N}$ अपूर्णांकानं दिलेले आवर्ती दशांशदेखील विचारार्थ घेता येतात. मात्र या प्रक्रियेत, M < N. किंबहुना N = ७च्या संदर्भात आपण अंशस्थानी M साठी, M = २, ३, ४, ५, ६ < N अशा किंमती घेऊ शकतो. पहा :

M	$\frac{M}{N}$	**आवर्ती दशांश**	$\frac{M}{N} \times N$	**डेम्लो संख्या**
२	$\frac{२}{७}$	$०.\dot{२}८५७१\dot{४}$	२८५७१४ x ७ = १९९९९९८	$=१(९)_{५}८$
३	$\frac{३}{७}$	$०.\dot{४}२८५७\dot{१}$	४२८५७१ x ७ = २९९९९९७	$=२(९)_{५}७$
४	$\frac{४}{७}$	$०.\dot{५}७१४२\dot{८}$	५७१४२८ x ७ = ३९९९९९६	$=३(९)_{५}६$
५	$\frac{५}{७}$	$०.\dot{७}१४२८\dot{५}$	७१४२८५ x ७ = ४९९९९९५	$=४(९)_{५}५$
६	$\frac{६}{७}$	$०.\dot{८}५७१४\dot{२}$	८५७१४२ x ७ = ५९९९९९४	$=५(९)_{५}४$

टीप : $\frac{२}{७}$, $\frac{३}{७}$ ...चे आवर्ती दशांश म्हणजे $\frac{१}{७}$ च्या व्यस्तांकाची चक्रीय क्रमानं मांडणीच आहे. अशाच रीतीनं

$\frac{१}{१३}$ = ०७६९२३ घेऊन $\frac{२}{१३} = १५३८४६ = १५३(९)_{०}\ ८४६$, $\frac{\begin{matrix}१५३\\८४६\end{matrix}}{९९९}$

आणि $१५३८४६ \times १३ = १९९९९९८ = १(९)_{५}\ ८$

तसंच $\frac{१२}{१३} = ९२३०७६ = ९२३(९)_{०}\ ०७६$, $\frac{\begin{matrix}९२३\\०७६\end{matrix}}{९९९}$

आणि $\frac{१२}{१३} \times १३ = ९२३०७६ \times १३ = ११९९९९८८ = \frac{११+८८}{९९}$

$= ११(९)_{४}\ ८८$

● स्वयंभू संख्या (सेल्फ नंबर्स)

१९४९ साली कापरेकरांनी जी नमुनेदार संख्या शोधून काढली तिला त्यांनी 'सेल्फ नंबर' असं नाव दिलं. खरोखर ती 'स्व-निर्मित' म्हणजे स्वत:च उपजलेली किंबहुना स्वयंभूच असल्यामुळं आपण तिला स्वयंभू संख्या म्हणू.

मात्र १९७४ साली जेव्हा अमेरिकन मॅथेमॅटिकल मंथली या नियतकालिकात ह्या संख्यांवर लेख आला तेव्हाच त्या भारताबाहेर परिचित झाल्या.

स्वयंभू संख्या समजण्यासाठी प्रथम 'संख्यांक किंवा अंक बेरीज' ही संकल्पना कळणं आवश्यक आहे. समजा, सुरुवातीस कोणतीही पूर्णांकी संख्या

N = ४३७ --- (i) घेतली.
तर N चे ४, ३, ७ अंक घेऊन
N ची अंक बेरीज = ४ + ३ + ७ = १४ --- (ii)
(i) व (ii) वरून, नवी संख्या, N_1 = N + तिची अंक बेरीज
= ४३७ + १४ = ४५१ --- (iii)
म्हणजे सुरुवातीच्या N संख्येवरून अंकबेरीज प्रक्रियेनं N_1 काढली.

अशीच $N_{१}$ वरून अंक बेरजेनं $N_{२}$ पुढं $N_{२}$ वरून $N_{३}$ मग $N_{४}$, $N_{५}$ --- वगैरे नव्या संख्या काढता येतात. या प्रक्रियेस कापरेकरांनी, 'अंक बेरीज प्रक्रिया' (डिजिटॅडिशन प्रोसेस) म्हटलेलं आहे आणि अंक बेरीज प्रक्रियेनं N पासून $N_{१}$ ही नवी संख्या मिळते म्हणून N सारख्या, संख्येला, 'जनक अथवा उत्पादक संख्या (जनरेटिंग नंबर)' म्हणतात. तर नव्या $N_{१}$ संख्येस, 'उत्पादित संख्या (जनरेटेड नंबर)' म्हणतात. थोडक्यात, $N_{१}$ ची उत्पादक संख्या N आणि N वरून काढलेली $N_{१}$ म्हणून ती उत्पादित संख्या. असं एकमेकींचं नातं आहे. वरील उदाहरणात, ४३७ ही ४५१ची उत्पादक संख्या तर ४५१ ही ४३७ पासून उत्पादित झालेली संख्या.

N या मूळ संख्येपासून $N_{१}$, $N_{२}$, $N_{३}$ --- इत्यादी नव्या नव्या संख्या काढण्याची प्रक्रिया कितीही दूरवर चालू ठेवता येते.

टीप : या सर्व चर्चेत N पूर्णांकी संख्या असण्याची अट आहे. ह्या अंकबेरीज संकल्पनेच्या सहाय्यानं स्वयंभू संख्येची व्याख्या करता येते.

व्याख्या : ज्या संख्येला कोणतीही उत्पादक संख्या नाही तिला स्वयंभू संख्या म्हणतात.

म्हणजे ती कोणत्याही संख्येपासून उत्पन्न होत नाही. थोडक्यात, तिचा कुणी निर्माता किंवा जनक नाही. वरील चर्चेचा इत्यर्थ हा की, N सारखी प्रत्येक संख्या $N_{१}$ या नव्या संख्येस जन्म देते. पण स्वयंभू संख्येला मात्र कुणीही आई-बाप नाहीत!

उदाहरणार्थ, नैसर्गिक संख्यांच्या आरंभापासून विचार केला तर, १, ३, ५, ७, ९ यांना कोणतीही उत्पादक संख्या नाही. तेव्हा वरील निकषानुसार त्या स्वयंभू संख्या आहेत. या विवेचनाचा अधिक विस्तार करण्यासाठी आपण अंकबेरीज प्रक्रियेनं

१) N = १ घेऊन येणाऱ्या उत्पादित संख्यांची श्रेणी काढू.
N = १ ∴ $N_{१}$ = १ + १ = २, $N_{२}$ = २ + २ = ४,
$N_{३}$ = ४ + ४ = ८, $N_{४}$ = ८ + ८ = १६,
$N_{५}$ = १६ + १ + ६ = २३ येणे प्रमाणं नव्या संख्या काढत जायचं.
जर ही श्रेणी, S(१) चिन्हानं दाखविली तर,
S(१) = १, २, ४, ८, १६, २३, २८, ३८, ४९, ६२ --- १०७, ११५ --- अशी कितीही पदांपर्यंत ती लांबवता येते.

२) N = ३ घेतल्यावर,
S(३) = ३, ६, १२, १५, २१, २४ --- ५७, ६९, ८४, ९६ ---

निरीक्षण : S(३)च्या प्रत्येक पदाचा ३ अवयव किंवा गुणक आहे. ९ मात्र कोणत्याच पदाचा गुणक नाही.

३) N = ९ घेतल्यास,
S(९) = ९, १८, २७, ३६ ---

निरीक्षण : प्रत्येक पदाचा ९ गुणक. अपवाद १०८चा. ती या श्रेणीत येत नाही, कारण तिला उत्पादक संख्या नाही. म्हणजे १०८ ही स्वयंभू संख्या आहे.

ह्या चर्चेवरून जसा सुरुवातीचा अंक N घेऊ त्याप्रमाणं अंकबेरीज श्रेणीतलं प्रत्येक पद (अ) ३ किंवा ९चा गुणक नसलेलं (ब) ३चा गुणक असलेलं पण ९चा नसलेलं (क) ९ गुणक असलेलं, असतं. अर्थातच N दिल्यावर कितीही पदांची S(N) श्रेणी तयार करता येते.

कोणत्याही संख्येची उत्पादक संख्या काढणं

दिलेल्या N संख्येचा उगम कशामुळं आहे? म्हणजे ती कोणत्या संख्येपासून उत्पन्न झाली? या प्रश्नांचा मागोवा घ्यायचा म्हणजे Nच्या उत्पादक संख्येचा शोध घ्यायचा.

समजा M संख्येवर अंकबेरीज प्रक्रिया करून N मिळत असले तर त्यांचा परस्पर संबंध $N_{-१} = M$

असा, Nच्या पायाशी उलट प्रक्रिया अर्थानं '-१' लिहून, गणिती चिन्हांकित भाषेत हा संबंध दाखवता येतो.

S(१) श्रेणीतली ६२ संख्या ४९ वरून उत्पादित झाली. कारण ४९ + ४ + ९ = ६२ म्हणजे ४९ ही ६२ची उत्पादक संख्या आहे.

वर सूचित केल्याप्रमाणं उलट प्रक्रियेनं हा संबंध, $६२_{-१} = ४९$, असा लिहिता येतो. ह्या रितीनं मागं गेल्यास, $४९_{-१} = ३८$, कारण, ३८ + ३ + ८ = ४९ आणखीन मागं जाऊन, $३८_{-१} = २८$ ह्या सगळ्यांचे परस्पर संबंध

$६२_{-३} = ४९_{-२} = ३८_{-१} = २८$ असे चिन्हस्वरूपात दाखवता येतात.

अशा रीतीनं मागं मागं जाऊन कितीही संख्या काढता येतात का? या प्रश्नाचं उत्तर नाही असून, कोणत्यातरी संख्येपाशी आपण अडखळतो. म्हणजे तिची उत्पादक संख्या काढणं अशक्य ठरतं. या संख्येलाच स्वयंभू संख्या म्हणतात.

उदाहरणार्थ, N = २६ घेतल्यावर $N_{-१} = २६_{-१} = २२$

∵ २२ + २ + २ = २६ पुढं $२२_{-१} = २०$ ∵ २० + २ + ० = २२

पण $२०_{-१}$ =? इथं आपण अडखळतो. कारण २०ची जनक अथवा उत्पादक संख्या काढता येत नाही. तेव्हा २० ही स्वयंभू संख्या आहे. खरं तर

S(२०) = २०, २२, २६, ३४, ४१ ---

या श्रेणीची २० ही आरंभ संख्या असून तिच्या मागं जाता येत नाही. लहानात लहान स्वयंभू संख्या म्हणून १चा निर्देश करता येतो. कारण तिला जनक नाही. किंबहुना १ पासून सुरू केलेली S(१) श्रेणी आपण यापूर्वीच काढलेली आहे.

आता १ नंतर ३, ५, ७, ९ या स्वयंभू संख्या लिहिल्यावर २०, ३१,

४२, ५३, ६४, ७५, ८६, ९७ आणि १०८ इतक्या पहिल्या १४ स्वयंभू संख्यांची इथं नोंद करू. यापैकी प्रत्येक संख्या N च्या जागी घालून, S(१), S(३) --- S(९७), S(१०८) या श्रेणी काढता येतात.

निरीक्षण : २० ते १०८ पर्यंतच्या स्वयंभू संख्या ११ समान अंतराच्या गणित श्रेढीत आहेत.

मात्र, १०८ + ११ = ११९ ही स्वयंभू संख्या नाही.

कारण, $११९_{-१} = १०९$ ∵ १०९ + १ + ० + ९ = ११९.

आता पर्यंतच्या विविचनाचा सारांश म्हणून सोयीसाठी पुढील कोष्टक करणं हितकारक ठरेल. त्यात अगदी डावीकडच्या पहिल्या रकान्यात १ ते १०८ मधल्या स्वयंभू संख्या लिहून त्या प्रत्येकी समोर अंक बेरीज प्रक्रियेने मिळणारी उत्पादित संख्या श्रेणी लिहिली आहे.

आरंभसंख्या N	**उत्पादित संख्यांची श्रेणी S(N)**
१	२ ४ ८ १६ २३ २८ ३८ ४९ ६२ ७० ७७ ९१ १०१ १०३ १०७..
३	६ १२ १५ २१ २४ ३० ३३ ३९ ५१ ५७ ६९ ८४ ९६ १११...
५	१० ११ १३ १७ २५ ३२ ३७ ४७ ५८ ७१ ७९ ९५ १०९...
७	१४ १९ २९ ४० ४४ ५२ ५९ ७३ ८३ ९४ १०७ ११५...
९	१८ २७ ३६ ४५ ५४ ६३ ७२ ८१ ९० ९९ ११७...
२०	२२ २६ ३४ ४१ ४६ ५६ ६७ ८० ८८ १०४ १०९...
३१	३५ ४३ ५० ५५ ६५ ७६ ८९ १०६ ११३ ११८...
४२	४८ ६० ६६ ७८ ९३ १०५ १११ ११४...
५३	६१ ६८ ८२ ९२ १०३ १०७ ११५...
६४	७४ ८५ ९८ ११५...
७५	८७ १०२ १०५ १११ ११४ १२०...
८६	१०० १०१ १०३ १०७ ११५...
९७	११३ ११८ १२८...
१०८	११७ १२६ १३५...

स्वयंभू संख्या ओळखण्याची कसोटी

कटक इथं १९५७ साली झालेल्या गणिती परिषदेत कापरेकरांनी वरील मथळ्याचा निबंध वाचला होता.

स्वयंभू संख्या ओळखण्याची कसोटी काढण्यासाठी त्यांनी अंकीय मूळ (डिजिटल रूट) ही संकल्पना मांडली.

संकल्पना : दिलेल्या N संख्येच्या अंकांची बेरीज दोन अथवा तीन आकडी आली तर ती एक अंकी निघेपर्यंत ही प्रक्रिया पुन्हा पुन्हा करून शेवटी जो एक अंक येईल त्याला त्या N संख्येचं 'अंकीय मूळ' म्हणतात.

हे अंकीय मूळ, इंग्रजी d (डी) अक्षरानं दाखवण्याचा संकेत आहे.

उदाहरण (i) : N = ९७, पहिली बेरीज ९ + ७ = १६, दोन अंकी

$\therefore$ दुसरी बेरीज १ + ६ = ७

$\therefore$ d = ७, हे ९७चं अंकीय मूळ.

उदाहरण (ii) N = ३४५९, पहिली बेरीज ३+४+५+९=२१ दोन अंकी

$\therefore$ दुसरी बेरीज २ + १ = ३

$\therefore$ d = ३, हे ३४५९चं अंकीय मूळ.

उदाहरण (iii) N = ८७८७८७८८८७--- (स)

पहिली बेरीज ८+७+८+७+८+७+८+८+८+७=७६, दोन अंकी

दुसरी बेरीज ७ + ६ = १३ दोन अंकी--- तिसरी बेरीज = १ + ३ = ४

तेव्हा, d = ४ हे (स)चं अंकीय मूळ.

तिन्ही उदाहरणातल्या d च्या किंमती पाहून d सम किंवा विषम येऊ शकते, हे लक्षात घेणं आवश्यक आहे.

(अ) जर d विषम, तर, $c = \frac{d + ९}{२}$ काढा.

(ब) जर d सम, तर, $c = \frac{d}{२}$ काढा.

c च्या किंमती वरून N स्वयंभू की नाही, ते ठरवता येतं. त्यासाठी

$N_{१} = N - c, N_{२} = N - c - ९, N_{३} = N - c - १८, N_{४} = N - c - २७,$---

म्हणजेच $N_{१} = N - c, N_{२} = N_{१} - ९, N_{३} = N_{२} - ९, N_{४} = N_{३} - ९$--- काढायला लागतात.

कसोटी : $N_{१}, N_{२}, N_{३}$--- इत्यादीपैकी एकेक संख्या क्रमानं घेऊन त्यात त्यांची अंकबेरीज मिळवून ती जर दिलेल्या N संख्येइतकी आली तर विचारार्थ असलेली N संख्या स्वयंभू नाही, हे सिद्ध होतं.

किती पायऱ्या आवश्यक? N मध्ये जितके अंक तितक्या पायऱ्या करून N स्वयंभू की नाही, ते ठरवता येते.

थोडक्यात, (क) N दोन अंकी तर, N_1, N_2 या दोन पायऱ्या

(ड) N तीन अंकी तर, N_1, N_2, N_3 या तीन पायऱ्या

(इ) N चार अंकी तर, N_1, N_2, N_3, N_4 या चार पायऱ्या पुरेशा होतात.

ह्यापैकी, (च) एखाद्या पायरीत N आला तर, N स्वयंभू नाही.

(छ) कोणत्याही पायरीत N आला नाही तर, N स्वयंभू संख्या असल्याची खात्री होते.

उदाहरण (i) : N = ४८, पहिली बेरीज ४ + ८ = १२, दोन अंकी दुसरी बेरीज १ + २ = ३, विषम. यावरून d = ३

$\therefore c = \frac{d + ९}{२} = \frac{३ + ९}{२} = ६$

आता, $N_1 = N - c$ = ४८-६ = ४२ पुढं ४२ + ४ + २ = ४८ = N

$\therefore$ N = ४८ स्वयंभू संख्या नाही, एकाच पायरीत उत्तर.

(ii) : N = २४२ पहिली बेरीज २ + ४ + २ = ८ सम.

$\therefore$ d = ८

$\therefore c = \frac{८}{२} = ४$

आता, $N_1 = N - c$ = २४२-४ = २३८ मग २३८+२+३+८=२५१ $\neq$ N

$N_2 = N_1 - ९$ = २३८-९ = २२९ आणि २२९+२+२+९=२४२ = N

$\therefore$ N = २४२ स्वयंभू संख्या नाही.

(iii) : N = ३१ पहिली बेरीज ३ + १ = ४ $\therefore$ d = ४, सम.

$\therefore c = \frac{४}{२} = २$

आता, $N_1 = N - c$ = ३१-२ = २९ आणि, २९+२+९ = ४० $\neq$ N

$N_2 = N_1 - ९$ = २९-९ = २० आणि, २०+२ = २२ $\neq$ N

दोन्ही पायऱ्यांत (N च्या अंकसंख्यांएवढ्या) N येत नाही.

$\therefore$ N = ३१ ही स्वयंभू संख्या आहे.

११, १११ यांना उत्पादक संख्या आहेत. पण ११११, ८७४५३१ यांना नाहीत असं कापरेकरांनी म्हटलेलं आहे. त्याचा वरील कसोटीनं आपल्याला पडताळा घेता येतो. तसंच $\frac{१}{७}$ च्या आवर्ती दशांशात येणारी १४२८५७ ही डेम्लो संख्या असल्याचं आपण यापूर्वी पाह्यलेलं आहे. त्याचबरोबर ती स्वयंभू संख्यासुद्धा आहे, हेही वरील कसोटीनं सिद्ध करता येतं.

१०, १००, १०००, १०,०००, १००,००० या दहाच्या सर्व घातांकांना उत्पादक संख्या असल्या तरी १००,००,०० म्हणजे दशलक्ष किंवा मिलियन ही मात्र स्वयंभू संख्या असल्याचं नमूद करून पुढं कापरेकर म्हणतात की, म्हणूनच लक्षाधीश (मिलियनर) व्यक्ती जगात महत्त्वाची मानली जाते. आज मात्र कोट्याधीश किंवा अब्जाधीशाला ते महत्त्व आहे!

शेवटी २०व्या शतकातल्या १९०८, १९१९, १९३०, १९४१, १९५२, १९६३, १९७४, १९८५ आणि १९९६ ह्या वर्षसंख्या स्वयंभू असल्याचं कापरेकरांनी विधान केलेलं आहे. परंतु या पैकी १९०८ हे साल स्वयंभू संख्या नाही! कसं ते पहा –

N = १९०८ पहिली बेरीज १ + ९ + ० + ८ = १८, दोन अंकी

∴ दुसरी बेरीज १ + ८ = ९ = d, विषम

∴ $c = \frac{d + ९}{२} = ९$

आता, N_1 = १९०८-९ = १८९९,

मग १८९९ + १ + ८ + ९ + ९ = १९२६ ≠ N

पुढं, N_2 = १८९९-९ = १८९०

आणि १८९० + १ + ८ + ९ + ० = १९०८ = N

∴ १९०८ स्वयंभू हे कापरेकरांचं विधान चूक आहे. त्याऐवजी प्रस्तुत लेखकानं हुडकलेलं १९०६ हे वर्ष मात्र स्वयंभू संख्या दर्शवतं. वाचकांनी पडताळा घ्यावा.

अशाच रितीनं प्रस्तुत लेखकानं विद्यमान २१व्या शतकात, २००७, २०२२, २०३३, २०४४, २०५५, २०६६, २०७७, २०८८ आणि २०९९ ही सन वर्षं स्वयंभू संख्या असल्याचा पडताळा घेतला आहे.

आपल्या लक्षात येईलच की २०२२ पासून २०९९ पर्यंतचे स्वयंभू संख्यांचे सन ११ समान अंतराच्या गणित श्रेढीत आहेत.

● संगम संख्या

कृष्णा व कोयना या प्रसिद्ध नद्या आपल्या राज्यात महाबळेश्वर इथं उगम पावतात. मात्र कृष्णा नदी उत्तरेकडून तर कोयना पश्चिमेकडून अशा दोन भिन्न दिशांनी येऊन वायव्य दिशेला वळून कराड येथे त्यांचा प्रीतिसंगम होतो - त्याचप्रमाणं दोन संख्यांपासून निघालेल्या अंक प्रवाहांचा संगम एका संख्येच्या ठायी होतो. म्हणून अशा संख्यांना संगम संख्या म्हणतात.

उदाहरणार्थ, ९४ ची अंक बेरीज ९४ तच मिळवल्यावर आपल्याला

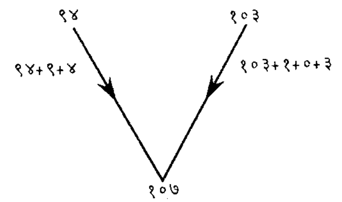
९४ + ९ + ४ = १०७ ... (i) मिळते.

हीच प्रक्रिया १०३ वर केली असता,

१०३ + १ + ० + ३ = १०७ ... (ii), पुन्हा तीच संख्या येते.

म्हणजे ९४ व १०३ कडून येणाऱ्या भिन्न अंकप्रवाहांचा १०७ या एकाच संख्येशी संगम झाला.

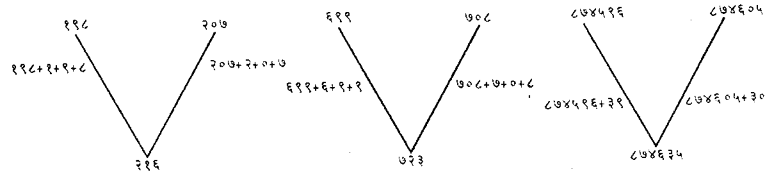
ही प्रक्रिया पुढीलप्रमाणं चित्रित करता येते.



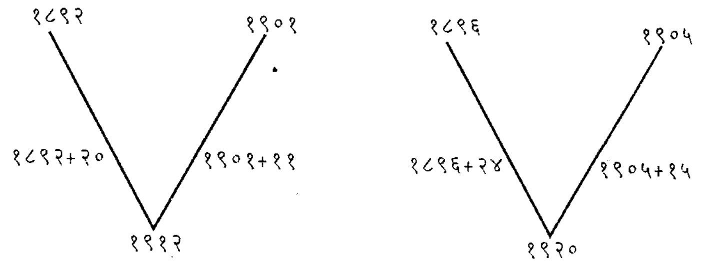
व्याख्या : ज्या एका संख्येस एकापेक्षा अधिक उत्पादक संख्या असतात, अशा संख्येस संगम संख्या म्हणतात.

यावरून आपल्या हे लक्षात आलं असेल की १०७ या उत्पादित संख्येला ९४ व १०३ या दोन उत्पादक किंवा जनक संख्या असून त्यांना सहजनक अथवा सहउत्पादक (को-जनरेटर्स) म्हणतात.

संगम संख्यांची आणखीन काही उदाहरणं पाहू.

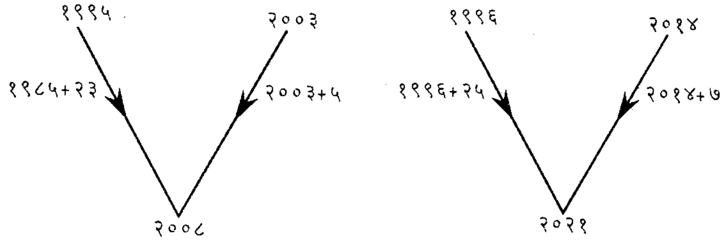


चटकन लक्षात येणारे २०व्या शतकातले १९१२ व १९२० या संगम सनांचे अनुक्रमं –



१८९२ व १९०१ आणि १८९६ व १९०५ हे सहउत्पादक येतात.

अशाच प्रकारे २१व्या शतकातले सहज लक्षात येणारे २००८ आणि २०२१ या सनांच्या संख्या संगमसंख्या आहेत. पहा :



स्वयंभू संख्यांच्या विवेचनात आपण, १, ३, ७... ९७, १०८ या स्वयंभू संख्या अगदी डावीकडच्या स्तंभात लिहून त्यांच्यासमोर त्या-त्या स्वयंभू संख्यांवरून मिळणाऱ्या उत्पादित संख्यांच्या S(N) श्रेणी काढल्या आणि कोष्टक तयार केलं. या कोष्टकात S(१), S(७), S(५३) आणि S(८६) या चारही श्रेणीत १०७ हा समाईक मीलन बिंदू येतो. तरी या श्रेणींचं काळजीपूर्वक निरीक्षण केल्यावर त्यातल्या ९४ व १०३ या फक्त दोन संख्यांवरूनच १०७ ही संगम संख्या मिळते. अशीच S(४२), S(७५) मध्ये १०५ ही संगम संख्या मिळते. वगैरे.

टीप : वरील श्रेणींचं निरीक्षण केल्यावर (१) कोणत्याही श्रेणीत येणारी संगम संख्या १००हून लहान नाही. (२) कोणत्याही शतकाअखेरच्या व लगोलग पुढच्या शतकारंभीच्या काही संख्या घेऊन पुढच्या शतकात पडणाऱ्या संगम संख्या मिळतात. (३) दोन सह-उत्पादक संख्यांतला फरक ९ किंवा १८ येतो.

अनेक उत्पादक संख्यांपासून एक उत्पादित संख्या काढता येते या संबंधीचं एक व्यापक प्रमेय (थियरम ऑफ जंक्शन कॉम्बिनेशन) कापरेकरांनी २० ऑक्टोबर १९६२ रोजी जाहीर केलं होतं.

● द्विमुखी संख्या

लहानपणी आपण गमतीजमतीच्या गप्पागोष्टी करताना नमन, टोमॅटो, सामोसा, लेले, नेने, रेठरे असे काही शब्द तर, चिमा काय कामाची, रामराम की मरामरा, रीमा लागूला मारी, असे शब्दसमूह एकमेकाला सांगून यातल्या शब्दांचं उलटं वाचन केल्यावर कोणते शब्द येतात ते ओळखायचा खेळ खेळत असू. अशाच प्रकारं उजवीकडून डावीकडं अथवा डावीकडून उजवीकडं वाचन किंवा लेखन केलं असता ज्यांची किंमत बदलत नाही अशा संख्या असतात. उदाहरणार्थ, ५३५, १३४३१, ८९८, ७२२२७, ३४५९९५४३. अशा संख्यांना द्विमुखी संख्या म्हणतात. कापरेकरांनी मात्र **'पॅलिन्ड्रॉमिक नंबर्स'** या मथळ्याखाली त्यांचं वर्णन केलेलं आहे.

द्विमुखी संख्या काढण्याची रीत : (१) कितीही अंकी संख्या घ्या. (२) तिचे अंक उलट क्रमानं लिहा. (३) या दोन्ही संख्यांची बेरीज करा. (४) ही प्रक्रिया सतत काहीवेळा केल्यावर द्विमुखी संख्या मिळते.

या कृतीची गणिती सिद्धता अशी केलेली नाही. पण ती केल्यावर द्विमुखी संख्या मिळते, ही वस्तुस्थिती आहे. या पद्धतीनं पॅलिन्ड्रॉमिक नंबर्सचा अभ्यास करून प्रो. ट्रिग यांनी अमेरिकन मॅथेमॅटिकल मंथली नियतकालिकात एक लेख लिहिला होता.

आता वरील रीतीनं काढलेल्या द्विमुखी संख्यांची काही उदाहरणं पाहू :

(१) १६३

	१६३	No, मूळ संख्या
	३६१	No उलट क्रमानं
पायरी १	५२४	बेरीज करून नवी संख्या N_1
	४२५	N_1 उलटा क्रम
पायरी २	९४९	द्विमुखी संख्या

या उदाहरणात दुसऱ्या पायरीतच द्विमुखी संख्या मिळाली.

(२) २८७

	२८७	No
	७८२	No चा उलटा क्रम
पायरी १	१०६९	N_1
	९६०१	N_1 चा उलटा क्रम
पायरी २	१०६७०	N_2
	०७६०१	N_2 उलटी
पायरी ३	१८२७१	N_3
	१७२८१	N_3 उलटी
पायरी ४	३५५५२	N_4
	२५५५३	N_4 उलटी
पायरी ५	६१११०५	N_5
	५०१११६	N_5 उलटी
	१११२२१	
	१२२१११	
पायरी ६	२३३३३२	, द्विमुखी संख्या

म्हणजे इथं ६व्या पायरीत २३३३३२ किंवा $२(३)_४२$ ही द्विमुखी संख्या मिळाली.

(अ) आता ज्या संख्येचे सर्व अंक १ आहेत अशांचे काही घातांक घेऊन द्विमुखी संख्या कशा येतात ते पाहू :

१) ११चे घातांक

$११^२ = १२१$; $११^३ = १३३१$

$११^४ = १४६४१$

२) १११चे घातांक

$१११^२ = १२३२१$; $१११^३ = १३६७६३१$

३) ११११चा वर्ग : $(११११)^२ = १२३४३२१$

४) ११११११चा वर्ग : $(११११११)^२ = १२३४५४३२१$

(ब) ज्या संख्यांच्या दोन्ही अंकांची बेरीज १० येते त्यांना ९,९९,९९९,... ने गुणून द्विमुखी संख्या मिळतात.

१) १९ x ९ = १७१; १९ x ९९ = १८८१

१९ x ९९९ = १८९८१; १९ x ९९९९ = १८९९८१

२) २८ x ९ = २५२; २८ x ९९ = २७७२

२८ x ९९९ = २७९७२; २८ x ९९९९९ = २७९९९७२

३) ४६ x ९ = ४१४; ४६ x ९९ = ४५५४

४६ x ९९९९ = ४५९९५४

४) ७३ x ९ = ६५७; ७३ x ९९ = ७२२७

७३ x ९९९ = ७२९२७; ७३ x ९९९९९ = ७२९९९९२७

आपल्या लक्षात येईलच की हे सर्व गुणाकार द्विमुखी संख्यांबरोबरच डेम्लो संख्याही येतात. आणखी एक निरीक्षण, गुणकात जितके ९ त्यापेक्षा उत्तरात आलेल्या ९ची संख्या दोनानं कमी.

१ ते १० मधल्या प्रत्येक दशकातल्या अशा (दहा येणारा अंक) संख्या घेऊन या कृतीचा पडताळा घेता येईल.

या द्विमुखी संख्यांवर कापरेकरांनी खूप चिंतन करून त्यात आढळणाऱ्या काही गंमतीची नोंद केलेली आहे. उदाहरणार्थ,

८००, ९००, ३००, ९००८ या संख्येची अंक बेरीज ३७ येत असून ती ३७ नि:शेष विभाज्य आहे.

कोणतीही संख्या घेऊन विकर्णन रीतीनं किंवा डेम्लोकरणानं ती काही वेळा पुन्हा पुन्हा लिहून बेरीज केल्यावर द्विमुखी संख्या मिळते, हे आपण डेम्लो संख्यांच्या विवेचनात पाह्यलंच आहे.

डेम्लोकरणाची ही रीत वापरून कापरेकरांनी विशिष्ट दोन अंकी संख्या घेऊन द्विमुखी संख्या मिळवण्याची पुढील रीत दिली आहे.

कोणतीही दोन आकडी संख्या अशी घ्या की तिच्या दोन्ही अंकांची बेरीज ११, १२, ----१८ इतकी येईल.

थोडक्यात, xy ही दोन अंकी संख्या मानल्यास,

x + y = ११, किंवा १२ किंवा १३ ----- किंवा १८ आली पाहिजे.

त्यानंतर, xy, xy + ९९, xy + २ x ९९,-----------xy + (y - १)९९ ही संख्याश्रेणी काढा. विकर्णन रीतीनं ही श्रेणी लिहून बेरीज घेतल्यावर द्विमुखी संख्या येते. उदाहरणार्थ, ६७ ही संख्या घेऊ.

इथं, xy = ६७ आणि x + y = ६ + ७ = १३

आता, वरील श्रेणी पुढील प्रमाणं येईल.

६७, ६७ + ९९, ६७ + २ x ९९, ६७ + ३ x ९९, ६७ + ४ x ९९, ६७ + ५ x ९९ आणि ६७ + (y - १) x ९९ म्हणजे ६७ + ६ x ९९, कारण y = ७, एकंस्थानचा अंक.

विकर्णन रीतीनं किंवा डेम्लोकरणानं ही श्रेणी लिहून :

```
            ६ ७
          १ ६ ६
        २ ६ ५
      ३ ६ ४
    ४ ६ ३
  ५ ६ २
६ ६ १
-------------------
७ २ २ २ २ २ २ २ ७
```

७२२२२२२२७ = ७(२)$_{७}$ ७ ही द्विमुखी संख्या.

मात्र डावीकडून उजवीकडं डेम्लोकरण केल्यास द्विमुखी संख्या येत नाही. या ठिकाणी तीन मुद्दे लक्षात ठेवले तर इतका व्याप न करता झटपट उत्तर काढता येतं. ते मुद्दे असे. (i) निवडलेल्या संख्येचं (एकंस्थान - १) इतक्या डेम्लोकरण पायऱ्या उत्तरासाठी पुरेशा होतात. (ii) एकंस्थानचा अंक उत्तराच्या दोन्ही टोकाला येतो. (iii) वारंवार येणारा अंक - (संख्येच्या अंकांची बेरीज - ११) तो एकंस्थाना इतक्या वेळा येतो. आता, या संदर्भात वर केलेल्या उदाहरणाचा पडताळा घेऊ.

(i) एकंस्थान ७ - १ = ६ पायऱ्या लागल्या. (ii) एकंस्थान ७ दोन्ही टोकाला. (iii) वारंवार येणारा अंक = ६ + ७ - ११ = २, तो ७ या एकंस्थानाइतक्या वेळा आला. अशा तऱ्हेनं झटपट उत्तर ७(२)$_{७}$ ७ मिळालं. आता सूचनांनुसार तीन उदाहरणं पाहू.

(१) संख्या ७४, ७ + ४ = ११ (i) एकंस्थान ४-१ = ३ पायऱ्या

(ii) एकंस्थान ४ दोन्ही टोकांना (iii) वारंवार येणारा अंक = ७ + ४ - ११ = ०, ४ या एकंस्थानाइतक्या वेळा. ∴ उत्तर = ४००००४ = ४(०)$_{४}$ ४.

(२) संख्या ८६ ८ + ६ = १४ (i) ६-१ = ५ पायऱ्या (ii) दोन्ही टोकांना एकंस्थान ६. (iii) वारंवार येणारा अंक = ८ + ६ - ११ = ३, ६ या एकंस्थानाइतका

∴ उत्तर = ६३३३३३३६ = ६(३)$_{६}$ ६

(३) संख्या ८९, ८ + ९ = १७ (i) ९-१ = ८ पायऱ्या (ii) दोन्ही टोकांना एकंस्थान ९ (iii) वारंवार येणारा अंक = ८ + ९ - ११ = ६, ९ वेळा ∴ उत्तर = ९(६)$_{९}$ ९.

चार अंकी संख्येवरून द्विमुखी संख्या

ABCD ही अशी एक संख्या घ्या की, AB आणि CD हे ९चे गुणक आहेत. शिवाय त्यांची बेरीज AB + CD ९ची पट, समजा, ABCD = ९k असेल. त्यास म्हणजे ९k ला M म्हणू. मग ABCD + M, ABCD + 2M, ... ABCD + ९M अशी श्रेणी काढून त्याचं डेम्लोकरण करू. बेरीज केल्यावर द्विमुखी संख्या येते. त्या उत्तराची डावी बाजू = $\frac{ABCD}{९}$ आणि उजवी बाजू त्याच्या उलट येते. मध्यभागी K येतो.

उदाहरण : समजा, AB = १८ आणि CD = २७. ∴ ABCD = १८२७ आणि AB + CD = १८ + २७ = ४५ = ९ x ५ = M.

आता, ABCD = १८२७, ABCD + M = १८२७ + ४५ = १८७२

ABCD + २ x ४५ = १९१७, ABCD + ३ x ४५ = १९६२,

ABCD + ४ x ४५ = २००७

ABCD + ५ x ४५ = २०५२, ABCD + ६ x ४५ = २०९७

ABCD + ७ x ४५ = २१४२

ABCD + ८ x ४५ = २१८७ आणि ABCD + ९ x ४५ = २२३२.

मात्र यांचं डेम्लोकरण डावीकडून उजवीकडं घेतलं तरच उत्तर येतं,

१ ८ २ ७
१ ८ ७ २
१ ९ १ ७
१ ९ ६ २
२ ० ० ७
२ ० ५ २
२ ० ९ ७
२ १ ४ २
२ १ ८ ७
२ २ ३ २

२ ० ३ ५ ५ ५ ५ ५ ५ ५ ३ ० २ = २०३(५)$_{७}$ ३०२

पहा, सूचनेनुसार : डावी बाजू = $\frac{१८२७}{९}$ = २०३ आणि या उलट उजवी बाजू = ३०२, M = ९ x ५ म्हणजे इथं K = ५. तेव्हा ५ हा वारंवार अंक ७ वेळा आला.

अशीच ABCD = २७३६ ही ९ नं विभाज्य संख्या घेतली तर ABCD = २७ + ३६ = ६३ = ९ x ७, K = ७, आणि $\frac{ABCD}{९}$ = $\frac{२७३६}{९}$ = ३०४ = डावी बाजू ∴ उजवी बाजू = ४०३

∴ यावरून द्विमुखी संख्या
= ३०४ ७७७७७७७४०३ = ३०४(७)$_{७}$४०३

द्विमुखी संख्यावरून नित्य समीकरणं

'अबशअबबअशबअ', ही अक्षर रचना वाचल्यावर ती द्विमुखी असल्याचं आपल्या त्वरित लक्षात येतं. कारण ती उलटसुलट वाचली तरी बदलत नाही. आता, अ आणि ब च्या कोणत्याही किंमती व श च्या जागी शून्य घालून या रचने पासून एक संख्या अशी बनते की तिच्या दोन गटांपासून आपल्याला नित्यसमीकरणं मिळतात.

समजा, अ = ८ व ब = ६ घेतले तर

अबशअबबअशबअ = ८६०८६६८०६८ ही संख्या मिळते. ह्या संख्येचे

८६०८६ आणि ६८०६८ असे गट केले.

आता, ८ + ६० + ८६ = १५४ = ६ + ८० + ६८ ---- (i)

आणि ८^{२} + ६०^{२} + ८६^{२} = ६४ + ३६०० + ७३९६ = ११०६०
६^{२} + ८०^{२} + ६८^{२} = ३६ + ६४०० + ४६२४ = ११०६० } (ii)

अशी तीच गट संख्यांची बेरीज आणि त्यांच्या वर्गांची बेरीज मिळते.

द्विमुखी संख्या मिळवण्याची आणखी एक रीत

समजा, A = ९७५३, अशी अंकांचा उतरता क्रम असलेली एक संख्या घेतली (त्यात कोणताही अंक शून्य असता कामा नये). नंतर ही दुसरी संख्या अशी घ्या की तिच्यातला प्रत्येक अंक A तील अंकाहून अनुक्रमे लहान असेल. समजा, B = ७५३२. पुढं A व B संख्यांचे ९९९९ पूरक काढा. ते अनुक्रमे C = ०२४६ आणि D = २४६७ मग C व D उलट क्रमानं लिहून त्यांना RC, RD म्हणू.

RC = ६४२०, RD = ७६४२ नंतर

A ९७५३ ७६४२ RD

B ७५३२ ६४२० RC

असे एकत्र घेऊन त्यांची वजाबाकी करू.

९७५३७६४२
७५३२६४२०
२२२११२२२ = २२२ (१)$_{२}$२२२ ही द्विमुखी संख्या आली!

A = ८६५२ आणि B = ६५४१ करिता हीच कृती करून आपल्याला, २११११११२ = २ (१)$_{६}$२ ही द्विमुखी संख्या काढता येईल.

द्विमुखी संख्यां संबंधीचे ऐतिहासिक संदर्भ

राष्ट्रकूट राजा अमोघवर्ष याच्या इस ८१४ ते ८७८ ह्या कारकीर्दीच्या काळात, थोर गणिती महावीराचार्य हे त्याच्या दरबारात एक मानकरी होते. त्यांच्या, 'गणित सारसंग्रह' ग्रंथात उरटसुलट प्रकारं कशाही लिहिल्या वाचल्या तरी एकच असणाऱ्या संख्यांच्या उदाहरणांची रेलचेल आहे. एखाद्या पुष्पहारात मधल्या फुलाच्या दोन्ही अंगांना जशा प्रकारं इतर फुलं समसमान गुंफलेली असतात, तशाच पद्धतीनं मधल्या अंकाच्या उभयअंगांना, येणाऱ्या अंकांची

रचना ज्या संख्येत समान असते अशा संख्येस ‘पुष्पहार संख्या’ असं म्हणता येईल. मात्र काही पुस्तकात या जातीच्या संख्यांचा निर्देश, ‘कंठाभरण’ किंवा ‘कंठहार’ संख्या असाही केलेला आढळतो. (पहा : ‘संसार के महान गणितज्ञ’, प्रकरण: महावीराचार्य, पान ८३, लेखक : गुणाकार मुळे). खुद्द महावीरांनीच जर या संज्ञा वापरल्या असतील तर मात्र त्या, त्यांच्या काळाशी सयुक्तीक होत्या असं म्हणावं लागेल. कारण आज, दोन्ही दिशांनी वाचन किंवा लेखन केल्यावर एकच संख्या येणं, हे जे आपल्याला अभिप्रेत आहे, त्याचा बोध कंठहार किंवा कंठाभरण संज्ञांवरून होत नाही, असं नाईलाजानं म्हणावं लागतं. म्हणून आरशातल्या प्रतिबिंबाप्रमाणं उलट सुलट अंक येणाऱ्या या संख्यांना, ‘द्विमुखी संख्या’ हेच नाव यथार्थ वाटतं.

महावीराचार्यांनी दिलेली कंठहार संख्यांची उदाहरणं अशी आहेत.

१२३४५६७९ x ९ = १११११११११ (नरपाल कंठिका भरण)

३३३३३३६६६६६७ x ३३ = ११००००११००००११

१४२८७१४३ x ७ = १०००१०००१ (रक्त कंठिका)

१४२८५७१४३ x ७ = १००००००००१ (राज कंठिका)

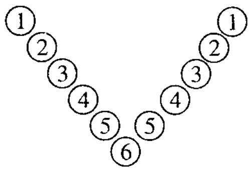
१५२२०७ x ७३ = ११११११११ (कंठा भरण)

११०११०११ x ९१ = १००२००२००१

१३९ x १०९ = १५१५१

२७९९४६८१ x ४४१ = १२३४५६५४३२१

या १२३४५६५४३२१ शेवटच्या द्विमुखी संख्येचं महावीरांनी, ‘एकादि षडन्तानि क्रमेण हीनानि’, असं अत्यंत उचीत व मनोरंजक शब्दात वर्णन केलेलं आहे. या चरणाचा अर्थ : जी संख्या १ पासून ६ पर्यंत क्रमवार वाढत जाते व नंतर उलट्या क्रमानं घटत जाते ती.



पुष्पहार रचनेत ही संख्या अशी बसवता येईल.

● कापरेकर संख्या

काही संख्यांचे वर्ग केल्यावर मिळालेल्या संख्यांत खास वैशिष्ट्य असल्याचं, १९४०च्या सुमारास, कापरेकरांच्या ध्यानांत आलं. मग अशा संख्यांचा पाठपुरावा करून त्याशोधून त्यांनी त्यांची यादीच तयार केली. त्यापैकी पुढील काही :

१) ४५^{२} = २०२५, ४ x (४ + १)२५ या नेहमीच्या रीतीनं. आता २० + २५ = ४५, म्हणजे ज्या संख्येचा वर्ग घेतला तीच आलेल्या वर्ग संख्येच्या २० आणि २५ या दोन गटांची बेरीज करून येते.

अर्थातच, त्यामुळं ४५^{२}चा (अ + ब)^{२} या बैजिक सूत्रानं पुढीलप्रमाणं पडताळा घेता येतो.

४५^{२} = (२० + २५)^{२} = २०^{२} + २ x २० x २५ + २५^{२}
म्ह.: २०^{२} + २ x २० x २५ + २५^{२}
= ४०० + १००० + ६२५
= २०२५
$\because$ (अ + ब)^{२} = अ^{२} + २ अब + ब^{२}

२) ५५^{२} = (३० + २५)^{२} = ३०२५, देखील वरीलप्रमाणे काढता येतो.

आणखी एका बाबीची नोंद घ्यायची म्हणजे,
५५ + ४५ = १००

म्हणजे, ४५ ही ५५ची १०० पूरक आणि उलटपक्षी.

मात्र १००च्या पूरक असणाऱ्या सगळ्या संख्यांच्या जोड्यांबाबत ही सोयिस्कर स्थिती येत नाही. पहा : ६७ + ३३ = १०० पण,
६७^{२} = ४४८९ आणि ४४ + ८९ $\neq$ ६७

३) तीन अंकी संख्यांचं कापरेकरांनी दिलेलं एक उदाहरण
२९७^{२} = ८८ २०९ आणि ०८८ + २०९ = २९७
इथं २९७ ही तीन आकडी असल्यानं तिचा १००० पूरक ७०३ येतो.
आणि (७०३)^{२} = ४९४ २०९ त्यावरून ४९४ + २०९ = ७०३ मिळते.

४) कापरेकरांनी न दिलेली, पण अभ्यास करताना मिळालेल्या चार आकडी संख्येचा वर्ग
(२२२३)^{२} = ४९४ १७२९ आणि ०४९४ + १७२९ = २२२३

ही चार आकडी म्हणून तिचा - १०,००० पूरक ७७७७ काढून पडताळा घेतल्यावर (७७७७)^{२} = ६०४८ १७२९ आणि ६०४८ + १७२९ = ७७७७ अशी वरील अट पुरी होणारी स्थिती आली.

वरील २२२३ आणि ७७७७ यांच्या वर्गात दोन्ही ठिकाणी शेवटी १७२९ ही रामानुजन संख्या आल्यानं ह्या वर्गसंख्या अधिकच गमतीदार वाटतात.

५) गणनयंत्र हाताळता हाताळता, २२२२२ ही अशीच पाच आकडी संख्या व तिचा १००,०००चा पूरक ७७७७८ हाती लागले. त्यांचे वर्ग :

(२२२२२)^{२} = ४९३८१७२८४ आणि १७२८४ + ४९३८ = २२२२२

(७७७७८)^{२} = ६०४९४१७२८४ आणि १७२८४ + ६०४९४ = ७७७७८

अशा आणखीन ही संख्या काढता येतील. मात्र त्यासाठी परिश्रम करावे लागतील.

वरील प्रमाणं हे गुणधर्म असलेल्या ज्या संख्या कापरेकरांनी काढल्या त्यांना, **कापरेकर संख्या** असं नाव, मुंबईच्या टाटा मूलभूत संशोधन संस्थेतील त्यावेळचे प्राध्यापक एस्. श्रीनिवासन यांनी दिलं.

● दत्तात्रेय संख्या

१९८० साली वेगळ्या जातीच्या या संख्या कापरेकरांना गवसल्या. नैसर्गिक संख्यांचे वर्ग करून आलेल्या संख्यांची रचना कधी कधी वैशिष्ट्यपूर्ण आढळते. त्यावरून ह्या संख्या ओळखल्या जातात. पहा :

(१) ७^{२} = ४९ इथं ४९चे ४ व ९ हे अंक अनुक्रमं २ व ३चे वर्ग आहेत.

ह्याच जातीच्या आणखी काही वर्गसंख्यांचं निरीक्षण केल्यावर या संख्या संबंधी आपली समज पक्की होईल.

(२)	१३^{२} = १६९,	१६ = ४^{२},	९ = ३^{२}
(३)	५७^{२} = ३२४९,	३२४ = १८^{२},	९ = ३^{२}
(४)	१३०^{२} = १६९००,	१६ = ४^{२},	९०० = ३०^{२}
(५)	१९०^{२} = ३६१००,	३६ = ६^{२},	१०० = १०^{२}
(६)	१०१२^{२} = १०२४१४४,	१०२४ = ३२^{२},	१४४ = १२^{२}

थोडक्यात, वर्ग करून आलेल्या संख्येची फोड करून मिळालेल्या प्रत्येक गटात वर्ग संख्या येते. यावरून निष्कर्ष असा निघतो की संबंध प्रक्रियेत एकूण तीन वर्ग आढळतात. एक, डावीकडं मूळसंख्येचा आणि उजवीकडच्या अलग गटात दोन. तेव्हा दत्तगुरूंच्या मूर्तीला तीन तोंड असल्यामुळं तीन वर्ग देणाऱ्या या संख्यांना कापरेकरांनी **दत्तात्रेय संख्या** असं समर्पक नाव दिलेलं आहे.

वैज्ञानिक प्रगतीमुळं ज्या आधुनिक वस्तू आपल्या वापरात येत आहेत, त्यांचा दोन किंवा अधिक कारणांसाठी आपण उपयोग करू शकतो. उदाहरणार्थ; जागेच्या टंचाईमुळं, दिवसा बसण्यासाठी बाक व रात्री झोपण्यासाठी पलंग म्हणून वापरला जाणारा सोफा कम बेड. किंवा प्रत्येक स्त्री-पुरुषाच्या गळ्यात अलिकडं दिसणारा दागिना म्हणजे फिरतं दूरध्वनि यंत्र! दूरच्या व्यक्तीशी बोलण्याकरिता अथवा तारे प्रमाणं तातडीचा निरोप पाठवायला, आकडेमोडीसाठी गणकयंत्र म्हणून फार काय कॅमेरा म्हणून छायाचित्र काढायलाही असे या यंत्राचे त्रिविध काय बहुविध उपयोग आहेत. तसंच दत्तात्रेय संख्यांच्या अंतरंगात तीन किंवा अधिक सुद्धा वर्ग समाविष्ट असलेले आपल्याला सापडतात

उदाहरणार्थ : १०४४^{२} = १०८९ ९३६, १०८९ = ३३^{२}, ९ = ३^{२}, ३६ = ६^{२}

१६०२^{२} = २५६ ६४०४, २५६ = १६^{२}, ६४ = ८^{२}, ०४ = २^{२}

६०४१^{२} = ३६४९३६८१, ३६ = ६^{२}, ४९ = ७^{२}, ३६ = ६^{२}, ८१ = ९^{२}

४० २०४^{२} = १६१६३६ १६१६, १६ = ४^{२}, १६ = ४^{२}, ३६ = ६^{२}, १६ = ४^{२}, १६ = ४^{२}

सारांश, काही मोठ्या संख्यांत ३, ४, ५ वर्गदेखील सामाविष्ट असतात. तरीसुद्धा त्या दत्तात्रेय संख्या म्हणूनच ओळखल्या जातात.

काही अपवादात्मक दत्तात्रेय संख्यांबाबत उजवीकडल्या दोन गटातल्या वर्ग संख्यांचा गुणाकार व त्यांची बेरीज करून आलेल्या संख्यांची बेरीज उजव्या बाजूच्या संख्येच्या इतकी येते. पहा :

(१) ७^{२} = ४९ आणि (४ x ९) + (४ + ९) = ३६ + १३ = ४९

(२) १३^{२} = १६९ आणि (१६ x ९) + (१६ + ९) = १४४ + २५ = १६९

(३) ५७^{२} = ३२४९ आणि (३२४ x ९) + (३२४ + ९) = २९१६ + ३३३ = ३२४९

परंतु हा व्यापक नियम होत नाही. कारण

३५^{२} = १२२५ पण (१ x २२५) + (१ + २२५) = २२५ + २२६

= ४५१ $\neq$ १२२५

तेव्हा वरील विधानाची सत्यता मर्यादित आहे.

● हस्तलाघव संख्या (फिंगर चेंजिंग नंबर्स)

दिलेल्या संख्येचा एकेक अंक आळीपाळीनं हाताच्या बोटानं झाकून उरलेल्या संख्येचं अंकीय मूळ टप्प्या टप्प्यानं लिहून या सगळ्या अंकीय मुळांपासून जी संख्या बनते तिला हस्तलाघव संख्या म्हणतात.

कृती : (i) प्रथम डावीकडील पहिल्या अंकावर हाताचं बोट ठेवून उरलेल्या संख्येचं अंकीय मूळ काढा (ii) ते पहिल्या अंकाखाली लिहा. (iii) मग दुसरा अंक झाकून असंच बाकी संख्येचं अंकीय मूळ काढून, ते पहिल्या अंकीय मूळाशेजारी उजव्या हाताला लिहा. (iv) तीच कृती पुढच्या अंकांसाठी करून आलेली अंकीय मुळ उजव्या अंगाला लिहित गेलं की मूळ संबंध संख्येच्या जागी नवी संख्या मिळते. तीच हस्तलाघव संख्या.

उदाहरण १ : ४७८

पायरी १ : $\boxed{४}$७८, पहिला अंक झाकून, ७ व ८ पासून अंकीय मूळ
७ + ८ = १५, १ + ५ = ६, तेव्हा, ४७८
६

पायरी २ : ४$\boxed{७}$८, दुसरा अंक झाकून, ४ व ८ वरून अंकीय
४ + ८ = १२, १ + २ = ३, तेव्हा, ४७८
६३

पायरी ३ : ४७$\boxed{८}$, तिसरा अंक झाकून, ४ व ७ पासून अंकीय मूळ
४ + ७ = ११, १ + १ = २, तेव्हा, ४७८
६३२

तेव्हा, ४७८ मूळ संख्येच्या अंकांवर आळीपाळीतं बोट ठेवून अंकीय मुळं काढून आपल्याला ६३२ ही जी नवी संख्या मिळाली तीच हस्तलाघव संख्या होय.

दिलेल्या संख्येच्या अंकांखाली क्रमवार अंकीय मुळं लिहून आलेल्या उत्पादित संख्येची वर्तणुक मनोरंजक वाटल्यामुळं कापरेकरांनी त्यांचं फिंगरचेंजिंग नंबर्स किंवा 'हाताची बोट बदलून येणाऱ्या संख्या' असं नामकरण केलं.

उदाहरण २ : ६४३५ ही चार आकडी संख्या घेऊ

पायरी १ : $\boxed{६}$४३५, ४ + ३ + ५ = १२, १ + २ + ३;
∴ ६४३५
३

पायरी २ : ६$\boxed{४}$३५, ६ + ३ + ५ = १४, १ + ४ = ५
∴ ६४३५
३५

पायरी ३ : ६४$\boxed{३}$५, ६ + ४ + ५ = १५, १ + ५ = ६
∴ ६४३५
३५६

पायरी ४ : ६४३$\boxed{५}$, ६ + ४ + ३ = १३, १ + ३ = ४
∴ ६४३५
३५६४

∴ ६४३५ वरून हस्तलाघव संख्या ३५६४.

उदाहरण ३ : ९२४६७ ही पाच आकडी संख्या घेऊ.

पायरी १ : $\boxed{९}$२४६७, २ + ४ + ६ + ७ = १९, १ + ९ = १०,
१ + ० = १ ∴ ९२४६७
१

पायरी २ : ९$\boxed{२}$४६७, ९ + ४ + ६ + ७ = २६, २ + ६ = ८
∴ ९२४६७
१८

पायरी ३ : ९२$\boxed{४}$६७, ९ + ४ + ६ + ७ = २४, २ + ४ = ६
∴ ९२४६७
१८६

पायरी ४ : ९२४$\boxed{६}$७, ९ + २ + ४ + ७ = २२, २ + २ = ४
∴ ९२४६७
१८६४

पायरी ५ : ९२४६$\boxed{७}$, ९ + २ + ४ + ६ = २१, २ + १ = ३,
∴ ९२४६७
१८६४३

∴ ९२४६७ची १८६४३ ही हस्तलाघव संख्या.

● रिक्तपदभरण संख्या : बहुल रिक्त पदभरण संख्या

दोहोपेक्षा जास्त अंक असलेली संख्या रिक्त पद भरण संख्या मानली जाते.

उदाहणार्थ, २७३, इथं २ व ३च्या दरम्यान ७ येतो.
३५४७, इथं ३ व ७च्या दरम्यान ५४ येते.

मात्र काही, रिक्तपदं भरण संख्या जिच्यापासून बनतात त्या संबंधित दोन अंकी संख्येच्या पटीत असतात. म्हणून त्यांना बहुल रिक्तपदं भरण संख्या म्हणतात.

उदाहरणार्थ, २७ ही आरंभ संख्या घेऊन २०००७ ही रिक्तपदं भरण संख्या घेतली तर

२०००७ = ७४१ x २७

म्हणून, २०००७ ही बहुल रिक्तपदं भरण संख्या कारण ती २७ची ७४१ पट आहे.

अशाच प्रकारं एखाद्या संख्येची पट घेऊन तिच्या पासून बनणाऱ्या बहुल रिक्तपद भरण संख्यांचे काही नमुने पुढं दिले आहेत.

(१) ७०००१९ = ८८६१ x ७९

(२) १९ची ९१ पट घेऊन १७२९ ही रामानुजन संख्या येते, हे आपल्याला ठाऊक आहे. पहा :

१७२९ = ९१ x १९

(३) ६९६९ = १०१ x ६९, ६९०६९ = १००१ x ६९

(४) ५४६४३ = १०३१ x ५३

(५) २०४४७९ = ७०५१ x २९

(६) ३९१३५३९३ = ११८५९२१ x ३३

अशा रीतीनं थोड्या फार खटपटीनं आकडेमोड करून आपल्याला एखाद्या संख्येच्या पटीवरून बहुल रिक्त पदं भरण संख्या काढता येतील.

मात्र रिक्त पदभरण संख्येचे व्यवच्छेदक लक्षण कापरेकरांनी कुठही नमूद केलेलं नाही.

श्री. वा. के. वाड यांच्या ''पाचवी गणित प्रज्ञातंत्र'' पुस्तकात दिलेल्या ७७ x २३ = १७७१ वरून १७७१ = १६१ x ११ ही रिक्तपद भरण संख्या निदर्शनास येते. तसंच १७७१ मध्ये ७७नं रिक्त पद भरण होऊन पुन्हा तिच्या दोन्ही अंगास रक्षकांप्रमाणं दंडाधारी १ उभे ठाकतात!

● आंदोलक संख्या (ऑसिलेटिंग नंबर्स)

दोन अंकी संख्येच्या एकं स्थानी असलेल्या अंकाला कोणताही अंकीय गुणक निवडून त्यानं गुणिल्यास जी संख्या येते ती संख्येच्या दशं स्थानच्या अंकात मिळवून नवीन उत्पादित संख्या काढण्याची एक विलक्षण रीत कापरेकरांनी शोधून काढली. मात्र या रीतीनं निर्माण झालेल्या संख्या कधी वाढतात तर कधी घटतात. म्हणून अशा उत्पादित संख्यांना आंदोलक संख्या असं यथार्थ नाव दिलेलं आहे.

एकं स्थानच्या अंकाला आपल्या इच्छेनुसार कोणत्याही अंकीय गुणकानं गुणता येतं.

उदाहरण : ५७ संख्या व ४ हा अंकीय गुणक घेऊ.

कृती :

५ ७	एकंस्थान ७, गुणक ४
२ ८	∴ ७ x ४ = २८
३ ३	३ x ४ = १२
१ २	
१ ५	५ x ४ = २०
२ ०	
२ १	१ x ४ = ४
४	
० ६	६ x ४ = २४
२ ४	
२ ४	४ x ४ = १६
१ ६	
१ ८	८ x ४ = ३२
३ २	
३ ३ वगैरे.	

यावरून, ५७, ३३, १५, २१, ०६, २४, १८, ३३... वगैरे कमी-जास्त हेलकावे खाणाऱ्या संख्या मिळतात. त्याच आंदोलक संख्या.

● वानरी संख्या

ह्या संख्या दत्तात्रेय संख्या प्रमाणं पण नैसर्गिक संख्यांच्या निरनिराळ्या घातांकांवरून ओळखता येतात. संख्येचे घातांक घेऊन आलेल्या संख्येच्या पोटात फिरून कोणत्यातरी स्थानात मूळसंख्या अवतीर्ण होते. जसे –

(१) २५^{२} = ६**२५**; ७६^{२} = ५७**७६**
६२५^{२} = ३९०**६२५**

(२) ४^{३} = ६**४**; ९^{३} = ७२**९**
३२^{३} = **३२**७६८; ५६^{३} = १७**५६**१६
४९^{३} = ११७६**४९**; २४^{३} = १३८**२४**
९९^{३} = ९७०२**९९**; ७६^{३} = ४३८९**७६**

(३) २५^{४} = ३९०६**२५**; ९२^{४} = ७१६ ३**९२**९६
८३^{४} = ४७४५**८३**२१

(४) २४^{५} = ७९६२६**२४**; ३२^{५} = ३३५५४४**३२**,
९९^{५} = ९५०**९९**००४**९९** जुळी संख्या

(५) १६^{६} = **१६**७७७२**१६** जुळी संख्या
२१^{६} = ८५७६६१**२१**

(६) ५^{८} = ३९०६**२५**

माकडीण पिलाला पोटाशी धरून जशी झाडाच्या या फांदीवरून त्या फांदीवर उड्या मारून तिथल्या तिथं घोटाळते, त्याप्रमाणं काही संख्याचे घातांक घेतल्यावर मिळालेल्या संख्येत कोणत्यातरी स्थानी मूळ संख्या प्रगट होते. थोडक्यात माकडीणीसारखी मूळसंख्या उत्तराभोवती घोटाळत असल्यामुळं १९८० साली वेगळ्या गुणधर्माच्या या संख्या आढळल्यावर कापरेकरांनी वानरी संख्या (मंकी नंबर्स) असं त्यांचं नामकरण केलं.

● हर्षद संख्या

नैसर्गिक संख्यांच्या पटींवरून या संख्या ओळखल्या जातात. दिलेल्या संख्येच्या अंक बेरजे इतक्या संख्येचा इथं शोध घ्यावा लागतो. अशी संख्या हाती लागली का आपल्या मनाची स्थिती आनंद भरून पावल्यासारखी होते. त्या स्थितीचं वर्णन नेमक्या शब्दात करण्यासाठी कापरेकर अशा संख्येला 'हर्षद संख्या' किंवा 'आनंददायक संख्या' म्हणू लागले. जसे :

(१) ४८ = ४ x १२, ४ + ८ = १२
(२) ७२ = ८ x ९, ७ + २ = ९
(३) ६० = १० x ६, ६ + ० = ६
(४) १७१ = १९ x ९, १ + ७ + १ = ९
(५) ३१२ = ५२ x ६, ३ + १ + २ = ६
(६) ५११ = ७३ x ७, ५ + १ + १ = ७
(७) ९०२ = ८२ x ११, ९ + ० + २ = ११
(८) ९१५ = ६१ x १५, ९ + १ + ५ = १५
(९) १८१८ = १०१ x १८, १ + ८ + १ + ८ = १८
(१०) २९२४ = १७२ x १७, २ + ९ + २ + ४ = १७.

रामानुजन संख्या १७२९ हीदेखील हर्षद संख्या आहे. पहा :
१७२९ = ९१ x १९, १ + ७ + २ + ९ = १९

तसंच, कापरेकर स्थिरांक ६१७४ सुद्धा हर्षद संख्या आहे.
६१७४ = ३४३ x १८, ६ + १ + ७ + ४ = १८

ह्या कृतीवरून आपल्या लक्षात आलंच असेल की, अंक बेरजेनं दिलेल्या संख्येला नि:शेष भाग जातो.

● विजय संख्या

काही नैसर्गिक संख्यांचे घन करून मिळालेल्या संख्यांच्या स्वरूपावरून या संख्या ओळखता येतात. त्यासाठी घन करून आलेल्या संख्येच्या अंकांची बेरीज घन केलेल्या संख्येबरोबर आली पाहिजे. ह्या जातकुळीच्या संख्या मिळवणं दुरापास्त होतं. म्हणून खूप खटपटीअंती जेव्हा असं साम्य आढळतं तेव्हा मनाला विजय मिळवल्याची भावना होते. म्हणून ही भावना सूचित करणारा शब्द वापरून कापरेकर अशा संख्यांना 'विजय संख्या' म्हणू लागले. जसे :

(१) ८^{३} = ५१२, ५ + १ + २ = ८
(२) १८^{३} = ५८३२, ५ + ८ + ३ + २ = १८
(३) १७^{३} = ४९१३, ४ + ९ + १ + ३ = १७
(४) २७^{३} = १९६८३, १ + ९ + ६ + ८ + ३ = २७
(५) २६^{३} = १७५७६, १ + ७ + ५ + ७ + ६ = २६

● विच्छेदनीय संख्या (डिसेक्टिबल नंबर्स)

द्विमुखी डेम्लो संख्येला काही विशिष्ट तीन अंकी संख्येनं गुणिले असतां गुणकाच्या अंकांदरम्यान अंतराळ पडून विच्छेदन होतं. हे अंतराळ रेषीय डेम्लो संख्यांनी (लीनियर डेम्लो नंबर्स) भरलं जातं. अशा २५ विच्छेदनीय संख्यांची यादीच कापरेकरांनी नमूद केली आहे. या जातीच्या संख्यांच्या रचनांचं निरीक्षण करून कापरेकरांनी विच्छेदनीय संख्येची व्याख्या पुढील प्रमाणं केली आहे.

व्याख्या : एखादी संख्या ९च्या पटीत असून ती पट देणाऱ्या दोन अंकी संख्येच्या दोन्ही अंकांची बेरीज ९हून जास्त नसली आणि त्या दोन अंकांपैकी मोठा अंक लहान अंकाच्या लगोलग पुढच्या अंकापेक्षा लहान नसला तर त्या संख्येस विच्छेदनीय संख्या म्हणतात.

समजा, अशी संख्या 'व' अक्षरानं दाखविली तर,

व = ९ x अब, जिथं अ + ब $\leq$ ९ आणि ब $\geq$ अ + १

इथं, अब ही पट देणारी दोन अंकी संख्या असं मानलं तर अ हे त्यासंख्येचं दशं स्थान आणि ब हे एकं स्थान आहे.

प्रश्न उपस्थित होतो तो हा की, अ आणि ब कोणत्या किंमती घेऊ शकतात? वरील अंटीनुसार पुढील शक्यता आहे.

अ	ब
०	१,२,३,४,५,६,७,८,९
१	२,३,४,५,६,,७,८
२	३,४,५,६,७,
३	४,५,६
४	५

कापरेकरांनी नमूद केलेल्या २५ विच्छेदनीय संख्या

९, १८, २७, ३६, ४५, ५४, ६३, ७२, ८१

१०८, ११७, १२६, १३५, १४४, १५३, १६२, २०७

२१६, २२५, २३४, २४३, ३०६, ३१५, ३२४, ४०५

जेव्हा द्विमुखी डेम्लो संख्येस विच्छेदनीय संख्येनं गुणिलं जातं तेव्हा गुणाकारात वारंवार येणाऱ्या अंकांच्या दोन गटांपैकी एका गटात येणारे अंक हे

दुसऱ्या गटात येणाऱ्या अंकाचे ९चे पूरक असतात. थोडक्यात, एका गटातला अंक 'क' मानला तर दुसऱ्या गटात प्रत्येक अंक ९ - क असला पाहिजे. आणि इथं, क = अ + ब आणि प्रत्येक गटात वारंवार येणारा अंक (न - १) वेळा आला पाहिजे, जिथं, न = द्विमुखी संख्येतला जास्तीतजास्त मोठ्या-मधल्या स्थानाचा अंक - आणि अब = विच्छेदनीय संख्या ÷ ९.

आता द्विमुखी डेम्लो संख्येस विच्छेदनीय संख्या असलेल्या गुणकानं गुणून, गुणाकार संख्येत येणाऱ्या विच्छेदनीय संख्येच्या अंकातला अंतराळ वारंवार येणाऱ्या अंकांनी कसा भरून जातो, त्याची उदाहरणं पाहू –

(१) १२३२१ ही द्विमुखी डेम्लो संख्या व गुणक १०८ विच्छेदनीय संख्या

इथं, $\frac{१०८}{९}$ = अब = १२ ∴ अ = १, दहंस्थान आणि ब = २ $\geq$ अ + १

अ + ब = १ + २ = ३ = क, मग ९ - क = ९ - ३ = ६ आणि

न = ३ ∴ न - १ = ३ - १ = २ (न - डेम्लोतला मधला अंक)

यावरून, १२३२१ x १०८ = **१** ३ ३ **०** ६ ६ **८**

उजवीकडील ठळक अंक विच्छेदनीय गुणकाचे. त्यांच्या दरम्यानचे अंतराळ वारंवार येणाऱ्या अंकांनी भरले आहेत.

(२) १२३४३२१ द्विमुखी डेम्लो संख्या, विच्छेदनीय गुणक १२६

इथं, $\frac{१२६}{९}$ = १४, ∴ अ = १, ब = ४ $\geq$ अ + १

अ + ब = १ + ४ = ५ = क आणि ९ - क = ९ - ५ = ४

तसंच, न = ४ ∴ न - १ = ४ - १ = ३.

यावरून, १२३४३२१ x १२६ = **१**५५५**२**४४४**६**

(३) १२३४५४३२१ द्विमुखी डेम्लो संख्या व ३२४ विच्छेदनीय गुणक

इथं, $\frac{३२४}{९}$ = ३६ = अब ∴ अ = ३, ब = ६ $\geq$ अ + १

अ + ब = ३ + ६ = ९ = क ∴ ९ - क = ९ - ९ = ०

आणि न = ५ ∴ न - १ = ४

यावरून, १२३४५४३२१ x ३२४ = **३**९९९९**२**००००**४**

'क'च्या किंमतीवरून येणारा अंक पहिला व त्याचा ९ पूरक उजव्या बाजूचा असे अंतराळ ते अनुक्रमं भरवतात. मात्र पुढील काही अपवादात्मक उदाहरणातून ही स्थिती बदलताना दिसते. पहा :

१२३२१ x ९ = ११०८८**९**

१२३२१ x १८ = २२**१**७७**८**

या उदाहरणात अनुक्रमं क = १ आणि क = २ सुरुवातीस, तर ९ पूरक ८ व ७ नंतर येतात. म्हणजे गुणक ९ व १८ जरी विच्छेदनीय, तरी वरील शिस्तीत बसत नाहीत.

(i) २१३१२ x १०८ = २३०१६९६

मध्ये ३ व ६च्या येण्यात शिस्त नाही, १०८ तर नाहीच

(ii) ४३७३४ x १०८ = ४७२३२७२

मध्ये तर ३ आहे पण पूरक ६ अजिबातच नाही! शिवाय गुणक नाही. अशा अपवादात्मक स्थितींबद्दल कापरेकरांची काय भूमिका होती त्याचे उल्लेख सापडत नाहीत. कां, विशिष्ट डेम्लो संख्या बाबतच असा आकृति बंध शक्य, तेही कळत नाही.

● तिरप्या झेपेच्या संख्या (क्रॉस जम्प नंबर्स)

सहा अंकी संख्या घेऊन तिरप्या झेपेच्या कृतीनं ह्या जातीच्या संख्या मिळवता येतात. त्यासाठी प्रथम सहा अंकी संख्येचे दोन गट करावे लागतात. डावीकडचे चार आकडे घेऊन होणाऱ्या संख्येचा पहिला गट तर उजवीकडच्या दोन अंकी संख्येचा दुसरा, असे दोन गट वेगळे करून त्या प्रत्येकात कोणताही अंक मिळवायचा. नंतर डावीकडचा चार अंकी गट उजवीकडं व उजवीकडचा दोन अंकी डावीकडं लिहून नवीन सहा अंकी संख्या मिळते. तिचे वरील प्रमाणंच गट वेगळे करून पुन्हा या कृतीनं आणखी एक नवी संख्या काढायची. तीच प्रक्रिया पुन्हा पुन्हा करून अशाच नव्या नव्या संख्या मिळवता येतात. या पद्धतीनं काढलेल्या संख्यांची वर्तणुक कुतूहलपूर्ण असल्यानं त्यांना तिरप्या झेपेच्या संख्या असं नाव देऊन कापरेकरांनी त्यांना आपल्या संख्या परिवारात समावून घेतलं.

उदाहरणार्थ, ५६३२१४२ ही सहा आकडी संख्या घेऊ

कृती : ५ ६ ३ १ ४ २ चार अंकी गट ५६३१;
दोन अंकी ४२

या प्रत्येक गटात समजा, २ मिळवले तर, ५६३१ + २ = ५६३३ आणि ४२ + २ = ४४

आता त्यांच्या जागांची अदलाबदल करून

नवीन संख्या = ४४ ५६३३

त्या संख्येत, चार अंकी गट, ४४५६, दोन अंक ३३

पुन्हा तोच २ अंक मिळवून, ४४५६ + २ = ४४५८ आणि
३३ + २ = ३५

आता जागा बदलून

∴ नवीन संख्या = ३५४४५८

पुन्हा वरील रीतीन, चार अंकी गट, ३५४४ + २ = ३५४६, दोन अंकी ५८ + २ = ६०. नंतर जागांची अदलाबदल करून

नवीन संख्या = ६०३५४६.

टीप : २ ऐवजी १, ३ इत्यादी सोयिस्कर, बेरीजेस सोप्या जाणारे अंक घेणं इष्ट.

अशी आणखीनही उदाहरणं घेऊन फावल्या वेळात आपल्याला तिरप्या झेपेच्या संख्या काढता गणिती करमणुक करून घेता येईल.

ह्या संख्यांना तिरप्या झेपेच्या संख्या नेमक्या कोणत्या कारणानं कापरेकर म्हणतात, त्याचा उलगडा होत नाही. फक्त गटांची अदलाबदल हेच कारण आहे का, ते कळत नाही. मात्र ही प्रक्रिया एखाद्या संख्येवर काही पायऱ्या चालवली तर ती पुन्हा अवतीर्ण होण्याची गंमत पुढील प्रकरणात दिली आहे.

● श्रीनिवास रामानुजन स्मारक संख्या १७२९

अ. भा. गणित अध्यापक मंडळाचे तेव्हाचे मानद सचीव प्रा. पी. के. श्रीनिवासन कापरेकरांच्या प्रेमात का पडले, ते सांगताना त्यांनी असं नमूद करून ठेवलं आहे की, ६०च्या दशकात आपल्या माजी विद्यार्थ्यांतर्फे रामानुजन संख्येसंबंधी सामग्री गोळा करताना आपण कापरेकरांनाही त्या विषयावर लिहिण्याची विनंती केली. त्याला त्वरित प्रतिसाद देऊन ज्या १७२९ संख्येभोवती रामानुजननं एक मोहक वलय निर्माण केलेलं होतं, त्यासंबंधी रोमांचकारक तपशीलाचा

लेख कापरेकरांनी लगोलग पाठवला. तेव्हापासून आपण त्यांचे चाहते झालो. त्या लेखात त्यांनी बहुलरिक्त पद भरण संख्या, बहुलअंकीय संख्या अशी अनोखी पण परिणामकारक शब्दयोजना केलेली होती.

आपण आलेल्या वाहनाचा क्रमांक, '१७२९ असून, ती एक कंटाळवाणी संख्या आहे' या प्रा. हार्डी यांच्या उद्‌गारावर रामानुजन यांनी त्वरित उत्तर दिलं की, ती तर खूपच चित्तवेधक संख्या आहे. कारण ती दोन प्रकारं, दोन घनांच्या बेरजेत पुढीलप्रमाण व्यक्त करता येते.

$१२^{३} + १^{३} = १७२९ = १०^{३} + ९^{३}$

एवंगुणविशिष्ट रामानुजन संख्येवर कापरेकर कसा विविध अंगानं प्रकाश पाडतात, ते पहाण्यासारखं आहे.

(१) १७२९ = १ + ७ + २ + ९ = १९ आणि १७२९ = १९ x ९१ म्हणजे १७२९ ही तिच्या अंक बेरजेची ९१ पट येते. म्हणून ती बहुल अंक बेरीज किंवा थोडक्यात, बहुल अंकीय संख्या

(२) ज्यांच्या अंकांची बेरीज १९ आहे अशा बहुल अंकीय संख्यांची यादी करताना १७२९चा क्रम चौथा लागतो. पहा :
८७४, १३८७, १५५८, १७२९, २५८४, २७५५, २९२६, ३०९७, ३२६८ इत्यादी.

(३) १७२९ ही संख्या १ आणि ९ दरम्यान ७२ घालून मिळते. म्हणून ती रिक्त पद भरण संख्या आणि ती १९ची ९१ पट म्हणून बहुल रिक्त पद भरण संख्याही आहे.

(४) १९ करिता बहुल रिक्त पद भरण संख्याच्या यादीत १७२९, ११५९, १३४९, १५३९, १७२९...
ही संख्या पुन्हा चौथ्या क्रमावर आहे.

(५) १७२९ चे अंक वापरून आपल्याला १७,७१,७९,व ९७ या अविभाज्य संख्या मिळतात. त्यांचे दोन्ही गट अंकांची अदला बदल करून येतात.

(६) $१७२९ = १०^{३} + २५^{२} + १०^{२} + २^{२}$ अशी एक घन व तीन वर्ग यांच्या बेरजेत व्यक्त करता येते.

◀■▶

३. संख्यांच्या गमती-जमती

● १०८९ची गंमत

प्राथमिक शाळेतली मुलंसुद्धा ज्या संख्येशी खेळण्याचा आनंद घेतात तो १०८९ हा स्थिरांक कसा काढता येतो ते पाहू.

त्यासाठी, ज्या संख्येच्या पहिल्या (शतं) व तिसऱ्या (एकं) अंकात किमान दोनचा फरक आहे अशी तीन अंकी संख्या प्रथम घेतली पाहिजे. नंतर ती उलट क्रमानं लिहून त्या दोहोपैकी जी मोठी तिच्यातून लहान संख्या वजा करा. मग ह्या वजाबाकीच्या खाली तीच उलट क्रमानं लिहून घ्या. आता त्यांची बेरीज केली की इच्छित १०८९ हा स्थिरांक मिळतो.

१)	आरंभसंख्या	:	८ ४ ६	(८ - ६ = २)
	तीच उलट क्रमानं	:	६ ४ ८	
	वजा करून	:	१ ९ ८	
	उलट क्रमानं	:	८ ९ १	
	बेरीज	:	१ ० ८ ९	इष्ट स्थिरांक

२)	आरंभसंख्या	:	४ २ ७	(७ - ४ = ३)
	उलट क्रम	:	७ २ ४	

ही मूळ संख्येपेक्षा मोठी म्हणून मोठ्यातून लहान वजा करण्यासाठी पुन्हा लेखन

		७ २ ४	
		४ २ ७	
वजाबाकी	:	२ ९ ७	
उलट क्रम	:	७ ९ २	
बेरीज	:	१ ० ८ ९	इष्ट स्थिरांक

३) आरंभसंख्या	:	६ ० २	(६ - २ = ४)
तीच उलट क्रमानं	:	२ ० ६	
वजा करून	:	३ ९ ६	
उलट क्रमानं	:	६ ९ ३	
बेरीज	:	१ ० ८ ९	इष्ट स्थिरांक

कापरेकरांनी १ल्या व ३ऱ्या अंकात २चा फरक असावा, असं म्हटलं आहे. पण तो १चा असला तरी या रीतीनं स्थिरांक येतो. पहा –

४) आरंभसंख्या	:	५ ८ ४	(५ - ४ = १)
उलट क्रम	:	४ ८ ५	
वजाबाकी	:	० ९ ९	
उलट क्रम	:	९ ९ ०	
बेरीज	:	१ ० ८ ९	इष्ट स्थिरांक

निरीक्षण : ह्या कृतीत, १९८, ८९१, २९७, ७९२; ३९६, ६९३ ०९९, ९९० आणि शेवटी स्थिरांक १०८९ सुद्धा, ह्या सगळ्या डेम्लो संख्या आल्या!

मंत्र : या कृतीनं १०८९ काढण्याचा मंत्र, 'उलट-वजा-उलट-बेरीज' असा, चटकन लक्षात ठेवायला सोपा!

१०८९चा पाढा लिहून आणखीन काही गमती मिळतात :

१०८९ x १ = १०८९, १ + ९ = १०, १ - १ = ०, ९ - १ = ८

१०८९ x २ = २१७८, २ + ८ = १०, २ - १ = १, ८ - १ = ७

१०८९ x ३ = ३२६७, ३ + ७ = १०, ३ - १ = २, ७ - १ = ६

. . . .

१०८९ x ७ = ७६२३, ७ + ३ = १०, ७ - १ = ६, ३ - १ = २

१०८९ x ८ = ८७१२, ८ + २ = १०, ८ - १ = ७, २ - १ = १

१०८९ x ९ = ९८०१, ९ + १ = १०, ९ - १ = ८, १ - १ = ०

प्रत्येक गुणाकारात (अ) सहस्त्राकाच्या जागी गुणका इतका अंक (ब) एकं स्थानी सहस्त्रक अंकाच्या दशपूरक (१० - सहस्त्रकांक) (क) दहं व शतं स्थानात एकं व सहस्त्र स्थानातल्या अंकांच्या लगोलाग आधीचे अंक येतात.

तीनापेक्षा जास्त अंकी संख्या घेऊन वरील मंत्रानं काय निष्पन्न होतं, त्याचा तपास करणं मनोरंजक ठरेल, असा १०८९ च्या गंमती पाहील्यानंतर कापरेकरांनी शेरा मारलेला आहे. त्यासाठी अधिक अंकांच्या संख्यावर मंत्राचा काय प्रभाव पडतो व केलेल्या कृतीचा कशात शेवट होतो, ते पाहू :

चार अंकीसंख्या

१) आरंभसंख्या	:	५ ४ ३ २	(५ - २ = ३)
तीच उलट क्रमानं	:	२ ३ ४ ५	
वजाबाकी	:	३ ० ८ ७	
उलट क्रमानं	:	७ ८ ० ३	
बेरीज	:	१ ० ८ ९ ०	
२) आरंभसंख्या	:	३ ४ २ १	(३ - १ = २)
तीच उलट क्रमानं	:	१ २ ४ ३	
वजाबाकी	:	२ १ ७ ८	
उलट क्रमानं	:	८ ७ १ २	
बेरीज	:	१ ० ८ ९ ०	

पाच अंकीसंख्या

३) आरंभसंख्या	:	९ ६ ७ ४ ५	(९ - ५ = ४)
तीच उलट क्रमानं	:	५ ४ ७ ६ ९	
वजाबाकी	:	४ १ ९ ७ ६	
उलट क्रमानं	:	६ ७ ९ १ ४	
बेरीज	:	१ ० ९ ८ ९ ०	
४) आरंभसंख्या	:	७ ९ ३ ८ ४	(७ - ४ = ३)
तीच उलट क्रमानं	:	४ ८ ३ ९ ७	
वजाबाकी	:	३ ० ९ ८ ७	
उलट क्रमानं	:	७ ८ ९ ० ३	
बेरीज	:	१ ० ९ ८ ९ ०	

सहा अंकीसंख्या

५) आरंभसंख्या	:	६ ८ ९ ५ ४ १	(६ - १ = ५)
तीच उलट क्रमानं	:	१ ४ ५ ९ ८ ६	
वजाबाकी	:	५ ४ ३ ५ ५ ५	
उलट क्रमानं	:	५ ५ ५ ३ ४ ५	
बेरीज	:	१ ० ९ ८ ९ ० ०	

६) आणखी एखादी पहिल्या व शेवटच्या अंकात १चा फरक असलेली ६ अंकी संख्या घेतली तरी या कृतीचा शेवट १०९८९००तच होतो.

निरीक्षण : तीन अंकी संख्येच्या कृतीत जसे डेम्लो भेटले तसे इथं येत नाहीत. शेवटच्या संख्याही त्याला अपवाद नाहीत.

● हस्तलाघव संख्यांची गंमत

मूळ संख्येचा एकेक अंक हाताच्या बोटानं आळापाळीनं झाकून उरलेल्या दोन अंकी संख्येचे टप्प्या टप्प्यानं अंकीय मूळ काढून हस्तलाघव संख्या कशी काढतात, ते आपण यापूर्वी पाह्यलं आहे.

आता इंथ, जी गंमत आपण पाहणार आहोत त्यात या प्रक्रियेनं फिरून मूळ संख्या कशी अवतीर्ण होते ते व त्यासाठी किती पायऱ्या कराव्या लागतात ते पाहू.

समजा, मूळ संख्या ३७१ घेतली तर

१) ३७१   ७ + १ = ८, ३७१; ३ + १ = ४, ३७१; ३ + ७ = १०, १ + ० = १
              ८   ८४   ३७१
                                  ८४१

म्हणजे पहिल्या पायरीत आपल्याला ८४१ ही हस्तलाघव संख्या मिळाली आता याचं रीतीनं उरलेल्या पायऱ्या लिहू.

(१) ८४१ (२) ५९३ (३) ३८५ (४) ४८२ (५) १६३ (६) ९४७ (७) २७४ (८) २६९ (९) ६२८ (१०) १५८ (११) ४९६ (१२) ६१४ (१३) ५१७ (१४) ८३६ (१५) ९५२ (१६) ७२५ (१७) ७३९ (१८) ३७१!

म्हणजे ही प्रक्रिया लागोपाठ केल्यावर १८व्या पायरीत मूळ संख्या अवतीर्ण होते. म्हणजे हाताची बोटं बदलून चक्रीय रीतीनं फिरून आपल्याला मूळ संख्या भेटते!

प्रश्न असा उद्भवतो की प्रत्येक तीन अंकी संख्येबाबत हीच निष्पत्ती, इतक्या पायऱ्यानंतर होते का? याचं उत्तर असं आहे की मूळ संख्येनुसार पायऱ्या बदलतात. म्हणजे असं की (१) ज्या संख्येत ३ अथवा ९ हा गुणक नाही ती फिरून येण्यासाठी १८ पायऱ्या आवश्यक आहेत.

२) ज्या संख्येचा ३ गुणक आहे परंतु ९ नाही ती, फिरून येण्यास फक्त ६ पायऱ्या लागतात. उदाहरणार्थ,
५८२ मूळ संख्या घेतली तर (१) १७४ (२) २५८ (३) ४१७ (४) ८२५ (५) ७४१ (६) ५८२! सहाव्या पायरीत मूळ संख्या आली.

३) मात्र ज्या संख्येचा ९ गुणक आहे. ती फिरून येण्यास फक्त दोन पायऱ्या पुरतात. पहा.
मूळ संख्या ३२४ घेतली तर (१) ६७५ (२) ३२४!

४) मात्र ९ नं भाग जाणारीच पण ९९९ मूळ संख्या घेतली तर उत्तर एकाच पायरीत येतं पहा :
९९९, ९ + ९ = १८, १ + ८ = ९, ९९९ हीच प्रक्रिया १ला व ३रा किंवा १ला व २रा अंक घेऊन केली तरी ९च अंक येतो.

∴ ९९९ → ९९९ ही मूळसंख्या एका पायरीत येते.

परंतु ९नं भाग जाणारी मूळ संख्या, ९०९ घेऊन सतत ९९९, ९९९... हीच येते. तसंच ३नं भाग जाणारी मूळसंख्या, ३०३ घेऊन ३६३, ९६९, ६९६, ६३६, ९३९ वगैरे येतात. म्हणजे या दोन्ही ठिकाणी मूळ संख्या येत नाही. याच कारण अंकीय मूळ '०' असत नाही. ही बाब कापरेकरांच्या नजरेतून सुटली की काय?

● तिरप्या झेपेच्या संख्यांची गंमत

सहा अंकी संख्या घेऊन तिरप्या झेपेच्या संख्या कशा मिळवायच्या ते आपण पाहयलंच आहे. त्यासाठी मूळ सहा अंकी संख्येचे डावीकडील चार अंकांचा एक गट व उजवीकडच्या दोन अंकाचा दुसरा गट करून ज्या संख्या येतात त्यात आपल्या सोयीच्या १, २ अशा अंकाची वाढ करून. मग त्या संख्यांची अदलाबदल करावी लागते. उदाहरणार्थ,

४३२१६८ येथे डावा गट ४३२१ उजवा ६८ यात समजा १नं वाढ केली तर डावागट ४३२१ + १ = ४३२२ आणि उजवा गट ६८ + १ = ६९. आता हे आपण अनुक्रमे उजव्या डाव्या गटांच्या जागी ठेवल्यावर नवी संख्या ६९४३२२ मिळाली. या कृतीनं नव्या संख्या मिळवता येतात.

आता या कृतीत एक महत्त्वाची सूचना लक्षात घ्यायची म्हणजे वाढीव संख्या गट संख्येत मिळवताना बेरीज करून आलेला अंक फक्त उत्तराच्या

जागी ठेवयाचा परंतु हातचा मात्र दुर्लक्षित करायचा. म्हणजे तो नेहमीप्रमाणं पुंढच्या संख्येत मिळवायचा नाही.

जसे : ७ + ७ = ४, १४ नव्हे; ८ + ९ = ७, १७ नव्हे
६ + ४ = ०, १० नव्हे!

ही अट कटाक्षानं पाळली की काय गंमत होती ते पहा :

(अ) वाढीव संख्या १, २... वगैरे. मात्र ५ वगळून घेतली तर वारंवार केलेल्या या प्रक्रियेनंतर १५व्या पायरीत मूळ संख्या अवतीर्ण होते!

उदाहरणार्थ : ६२४५७४ मूळ संख्या आणि वाढ १
कृती : ६२४५७४ मूळ संख्या आणि वाढ १
कृती : ६२४५७४ डावागट ६२४५ उजवा गट ७४, वाढ १
: (१) ७५६२४६ (२)६२४७७६ (३) ७७६२४८ (४) ४९७७६३ (५) ६४४९७८ **(६)** ७९६४४० पायरी लक्षात घ्या (७) ४१७९६५ (८) ७९६६४२ (९) ४३७९६७ **(१०)** ६८४३७० (११) ४३७१६९ **(१२)** ६०४३७२ (१३) ७३६०४४ (१४) ४५७३६१ (१५) ६२४५७४

१५व्या पायरीत फिरून मूळ संख्या आल्यानं इथं प्रक्रिया संपते. हीच गंमत!

हीच आरंभ संख्या घेऊन पण २ची वाढ घेतली तरी १५व्या पायरीतच मूळ संख्या अवतीर्ण होते.

(ब) (अ) मध्ये ५ वगळून म्हटलं, त्याचं कारण ५ची वाढ घेतली की झपाट्यानं मूळ संख्या येते. पहा.

आरंभ संख्या : ८३७६२६ वाढ ५ गट १:८३७६, गट २ :२६
(१) २१८३७१ (२) ७६२११८८ **(३)** ८३७६२६
किंवा, आरंभ संख्या ६२४५७४ (अ) मध्ये घेतलेलीच. वाढ ५ घेऊन
(१) ७९ ६२४० (२) ४५ ७९६७ **(३)** ६२ ४५७४
दोन्हीत फक्त तिसऱ्या पायरीत मूळ संख्या आली! आहे की नाही गंमत!
(अ) आणि (ब)च्या उदाहरणात ठळक केलेल्या पायऱ्यात हातचा वगळलेला.

● वाढदिवसांच्या तारखांची गंमत

तुमच्या दोन मित्रांच्या अथवा नातेवाईकांच्या वाढदिवसांच्या तारखा विचारून

सुट्टीच्या दिवशी मित्रांचा अथवा नातलगांचा मेळावा जमला असता हा खेळ खेळता येतो. या मागं थोडे परिश्रम आहेत पण नंतर मिळणारा गणिती आनंद अवर्णनीय म्हणता येईल. कापरेकरांनी या सगळ्या गणिती खटाटोपासाठी केलेल्या कष्टाच्या मानानं आपल्याला होणारे श्रम नगण्य म्हणता येतील. छत्रपती शिवाजी महाराज, लोकमान्य टिळक, महात्मा गांधी, पं. नेहरू या सारख्या थोर पुढाऱ्यांचे जन्म दिवस जाहीर असतात. निदान, ते आपल्या ग्रंथालयात सहज सापडतील. अशा दोघांच्या तारखा या खेळासाठी निवडता येतात.

कापरेकरांनी २३-७-१८५६ ही लोकमान्य टिळकांची आणि २-१०-१८६९ ही महात्मा गांधींची, अशा दोन जन्म तारखा २३०७१८५६ आणि ०२१०१८६९ अशा सलग लिहून घेतल्या आणि हातचा पुढं न नेण्याची अट पाळून ते एका मागोमाग एक बेरजा करीत गेले. या दोन जन्मतारखांची बेरीज केल्यावर आलेली बेरीज मागच्या संख्येत मिळवून पुढची संख्या काढायची. अशी सतत क्रिया करीत गेल्यावर ६१व्या पायरीला कापरेकरांना फिरून लोकमान्यांची जन्मतारीख मिळाली व ६२व्या पायरीत म. गांधीची! अशी यशस्वी फळनिष्पत्ती झाल्यावर अंगभूत उत्साहानं स्वत:च्या चेहऱ्यावर स्मित हास्य पसरवून, 'तुम्हाला नाही, असं वाटत? असा श्रोत्यांना प्रश्न करून आपल्या नेहमीच्या लकबीत, 'काय आश्चर्य!' असे उद्‌गार कापरेकर काढत असत.

वरील थोर पुढाऱ्यांच्या प्रक्रियेतल्या दोन पायऱ्या अशा :
२३०७१८५६ + ०२१०१८६९ = २५१७२६१५;
०२१०१८६९ + २५१७२६१५ = २७२७३४७४------

सदरहू लेखकानं, १८ - ६ - १९३० आणि १२ - ५ - १९३३ ह्या घरातल्या दोन घटकांच्या जन्मतारखा घेऊन

१८०६१९३० + १२०५१९३३ = २००१२८६३

१२०५१९३३ + २००१२८६३ = ३२०६३७९६ वगैरे प्रमाणं बेरजा घेऊन काढलेल्या उत्तरात ५९व्या पायरीला १८-०६-१९३० ही पहिली आणि ६०या पायरीला दुसरी जन्मतारीख मिळाली!

इतक्या वेळा बेरजा करीत जाण्याचा उत्साह राहीला तरच इथं फलनिष्पत्ती. वेळ व जागा खाऊ दीर्घ लेखन म्हणून या सर्व ६०/६२ पर्यंतच्या पायऱ्या इथं करून दाखवल्या नाहीत.

वाचकांनी मात्र या प्रक्रियेचा जरूर पडताळा घ्यावा.

● **घरंगळणाऱ्या ठोकळ्यांचा खेळ : (गेम विथ् टम्बलिंग ब्लॉक्स)**

गणितावर करमणुकप्रधान कार्यक्रम करताना मनोरंजना बरोबरच एखादं गणिती तत्त्वं वापरण्याची कृती श्रोत्यांच्या गळी उत्तरवतांना कापरेकर काही क्लृप्त्या व साधनं यांचा उपयोग करीत असत. अशी काही साधनं त्यांनी आपल्या भात्यात नेहमीच सज्ज ठेवलेली असत. वेळप्रसंगी श्रोत्यांना रिझवण्यासाठी हवं ते शस्त्र भात्यातून काढून सभाजनांना ते आश्चर्यचकीत करीत असत.

(i) त्वरित बेरीज करण्यासाठी टाचण्या मुडपून बनवलेल्या संख्या

(ii) ज्यावरच्या संख्याची त्वरित बेरीज करता येईल असे सहा घरंगळणारे ठोकळे बसवलेली चौकट.

(iii) तानापिहि... जादूचा चौरस

(iv) बाजाची पेटी व संख्यांची जादू

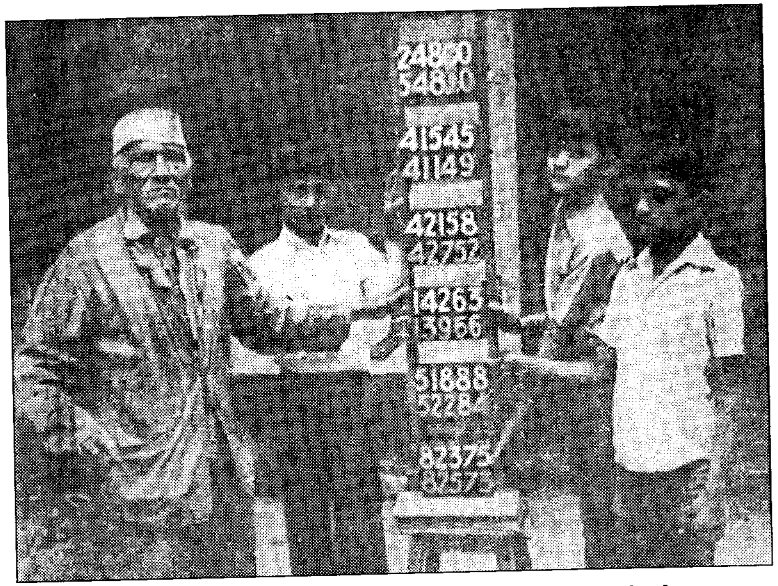
(v) न्यूटन जादू

(vi) ३ x ३ एककाचा कागदी चौरस.

गणिती चातुर्य दाखवण्यासाठी अशी काही साधनं ते कायम आपल्याजवळ ठेवीत असत. ह्यापैकी ६ घरंगळणाऱ्या ठोकळ्याची चौकट घेऊन ते काय गणिती कसब दाखवीत ते पाहू :

सहा लाकडी घनाकृती ठोकळे घेऊन प्रत्येकाच्या साही फलकांवर त्यांनी पुढील संख्या लिहिलेल्या आढळतात :

ठोकळा क्रमांक	त्यावरील संख्या					
१	६४८००	८४८००	२४८००	३४८००	७४८००	१४८००
२	४१८४२	४१७४३	४१३४७	४१५४५	४१२४८	४१४४६
३	४२२५७	४८८५१	४२५५४	४२७५२	४२४४५	४२६५३
४	१४२६३	१३७६८	१४१६४	१४०६५	१३८६७	१४३६२
५	५२१८५	५२०८६	५१८८८	५२४८२	५२३८३	५१९८२
६	८२६७२	८२२७६	८२१७७	८१९७९	८२०७८	८२४७४



हे ठोकळे घेऊन प्रेक्षकांच्या सहभागानं हा खेळ खेळता येतो. प्रेक्षकातल्या कुणाही एका व्यक्तीला ठोकळे फिरवायला सांगा. ते फिरण्याचे जेव्हा थांबतात तेव्हा प्रत्येक ठोकळ्याचा कुठचा तरी एक, असे सहा फलक आपल्या समोर येतात. त्यावरील संख्यांची बेरीज निमिषार्धात सांगून कापरेकर श्रोत्यांना विस्मयचकीत करीत असत. मग एखाद्या श्रोत्याला कागद-पेन्सिल अथवा गणक यंत्राच्या मदतीनं आपलं उत्तर पडताळण्यास सांगत असत. तो बापडा बराच वेळ आकडेमोड करून जे उत्तर सांगे, ते ऐकून श्रोतृवर्ग हास्यात बुडून जाई! कारण ते हमखास चुकलेलं असे! स्वाभाविकपणं, ते करणाऱ्याचं तोंड पाहण्यासारखं होई!

मात्र त्वरित बेरीज काढण्याचं हे गुपीत कापरेकरांनी दडवून न ठेवता पुढील प्रमाणं उघड केल्यामुळं आपल्यालाही या कृतीचा पडताळा घेता येतो.

पुढील पायऱ्यांचा अवलंब केला की ही बेरीज लगोलाग करता येते.

पायरी १ : सर्व संख्यांतल्या एकं स्थानांच्या अंकाची बेरीज घ्या व तिची नोंद करा

पायरी २ : ती बेरीज ९९तून वजा करून बाकी काढा.

पायरी ३ : पहिल्या पायरीत मिळालेल्या संख्येच्या डाव्या अंगास ही बाकी लिहा

पायरी ४ : शेवटच्या दोन स्थानी शून्य असलेल्या संख्येचा ठोकळा शोधून त्यावरील संख्या लिहून घ्या.

पायरी ५ : पहिल्या पायरीत बेरजेनं मिळालेली संख्या व चौथ्या पायरीत लिहिलेल्या संख्येतला दशसहस्राच्या जागी असलेला अंक यांची बेरीज करा.

पायरी ६ : पाचव्या पायरीत मिळालेली संख्या तिसऱ्या पायरीत लिहिलेल्या संख्येच्या डाव्या बाजूस जोडा.

सहाव्या पायरीत मिळालेली संख्या हीच साही ठोकळ्यांच्या श्रोत्यासंमोर स्थिर झालेल्या फलकांवरील संख्यांची बेरीज! सरावानं ती भरभर काढता येईल.

कापरेकरांनी, ४१७४३, ४२५५४, ६४८००,१३८६७, ८२४७४, ५२१८५ ह्या ठोकळ्यांवर आलेल्या संख्या घेऊन पुढीलप्रमाणं बेरीज केली आहे.

१ : ३ + ४ + ० + ७ + ४ + ५ = २३

२ : ९९-२३ = ७६

३ : ७६२३

४ : ६४८००

५ : २३ + ६ = २९

६ : २९७६२३, हीच वरील संख्यांची बेरीज आता वरील संख्यांपैकी आणखीन एक संख्या संच घेऊन आपण बेरीज करून वरील रीतीची खात्री पटवून घेऊ.

३४८००, ४१५४५, ४२७५२, १४०६५, ५२४८२, ८१९७९

१ : ० + ५ + २ + ५ + २ + ९ = २३

२ : ९९-२३ = ७६

३ : ७६२३

४ : ३४८००

५ : २३ + ३ = २६

६ : २६७६२३, हीच इष्ट बेरीज.

वाचकांनी नेहमीच्या रीतीनं अथवा गणकयंत्रानं पडताळा पहावा.

● आंदोलक संख्यांची करामत

कोणतीही दोन अंकी संख्या व ऐच्छिक गुणकांक घेऊन हा खेळ खेळता येतो. त्यातून नेहमीच्या रीतीनं - एकं स्थानास गुणकानं गुणून आलेली संख्या दशं स्थानात मिळवायची व नवी संख्या काढायची. आंदोलक संख्या मिळवायच्या. या संख्या केवळ आंदोलक नव्हे तर त्या आवर्तनी म्हणजे काही संख्यांनंतर मूळ संख्या तरी येते किंवा मूळसंख्येस अंक गुणकानं गुणून काढलेली पहिली संख्या तरी निघते. त्यानंतर पुढं ही कृती केल्यास अर्थातच फिरून त्या त्या संख्या त्याच क्रमानं येतील. हा एकल खेळ खेळल्यावर आपल्या हे लक्षात येईल की, आरंभीच्या संख्येच्या आंदोलक संख्येचा कालावधी (अ) आरंभ संख्येच्या अंकांवर, (ब) अंक गुणाकाच्या किंमतीवर, अवलंबून असतो. या प्रक्रियेत फिरून आरंभ संख्या येईल अथवा नाही पण ठराविक संख्यानंतर तीच संख्या येण्याचं चक्र चालूच राहील.

१. आरंभ संख्या १७ व गुणक ४ घेऊ.
यावरून पुढील आंदोलक संख्या मिळतात
१७, २९, ३८, ३५, २३, १४, १७

२. आरंभ संख्या ६३ गुणक ५
६३, २१, ०७, ३५, २८, ४२, १४, २१

ठराविक अवधीनंतर (१) मध्ये आरंभसंख्या १७ आली तर (२) मध्ये ६३ या आरंभ संख्येनं काढलेली २१ ही संख्या फिरून आली.

३. काही उदाहरणात क्रमिकेतली (सी क्वेन्स) पदं सम असतील तर त्या पदांचे दोन सारखे भाग करून दुसऱ्या अर्ध्या भागातली पदं पहिल्या अर्ध्या भागातल्या संगत पदांखाली अशातऱ्हेनं ठेवता येतात की त्यांची बेरीज एकच संख्या येईल.

उदारहणार्थ, आरंभ संख्या ८६, गुणक ३ यावरून, २६, २०, ०२, ०६, १८, २५, १७, २२, ०८, २४, १४, १३, १०, ०१, ०३, ०९, २७, २३, ११, ०४, १२, ०७, २१, ०५, १५, १६, १९, २८ आणि फिरून २६ अशा आंदोलक संख्या मिळतात. त्यातली शेवटची पुन्हा येणारी संख्या सोडल्यावर पदसंख्या २८ म्हणजे सम संख्या मिळते. तेव्हा पहिल्या भागाच्या १४ दुसऱ्या भागाच्या १४ घेऊन काय होत, ते पाहू.

२६,	२०,	०२,	०६,	१८,	२५,	१७,	२२,	०८,	२४,	१४,	१३,	१०,	०१
०३,	०९,	२७,	२३,	११,	०४,	१२,	०७,	२१,	०५,	१५,	१६,	१९,	२८
२९,	२९,	२९,	२९,	२९,	२९,	२९,	२९,	२९,	२९,	२९,	२९,	२९,	२९

दोन्ही उपक्रमिकां (खालची-वरची) पदं २९ पूरक असल्यानं ती १/२९ च्या आवर्ती दशांशाच्या संबंधाकडं लक्ष वेधतात.

४. ९नं शेवट होणारी आरंभ संख्या घेतली तर एक महत्त्वाची बाब दृष्टोत्पत्तीस येते. त्याकरिता वरील प्रक्रियेत गुण्याच्या दशंस्थानाच्या लगोलग पुढचा अंक गुणक घ्या. पहा :

(i) आरंभ संख्या ३९ आणि गुणक ३च्या लगोलग पुढचा, ३+१=४

∴	३९	४ x ९ + ३ म्हणजे,	३ ९	
	३९	४ x ९ + ३	३ ६	वगैरे
			३ ९	

(ii) आरंभ संख्या ७९, गुणक ७ + १ = ८

∴	७९,	८ x ९ + ७	७ ९	
	७९	८ x ९ + ७	७ २	इत्यादी
			७ ९	

थोडक्यात, ज्या दोन अंकी संख्यांचं एकं स्थान ९ असतं, त्यांच्या बाबतीत सुंदर रचना मिळून आरंभ संख्याच परत परत येते. आणि समसमान पदांची (३९,७९ इ.) - जी आरंभ संख्याच आहे-क्रमिका मिळते.

५. ह्यावरून ९ शेवट असणाऱ्या दोन आकडी संख्येनं विभाज्यता तपासण्याचं मोहक उपयोजन सूचित होतं.

१९ अवयव असलेली समजा, ३२४९ ही संख्या घेतली. आता वरील कृतीची विस्तारितरीत-म्हणजे दशं स्थानच्या पुढचा अंक गुणक घेऊन तो डावीकडच्या अंकात मिळवण्याची कृती सतत करीत राहून प्रत्येकास लावून विभाज्यता तपासू.

१.

३ २ ४ ९	
१ ८	९ x २
३ ४ २	
४	२ x २
३ ८	
१ ६	८ x २
१ ९	

१९ मिळाल्यानंतर इथं कृती संपते.

१९ मिळाले याचा अर्थ ३२४९ ही संख्या १९ नं विभाज्य.

३ २ ५ ३	
६	३ x २
३ ३ १	
२	१ x २
३ ५	
१ ०	५ x २
१ ३	
६	३ x ६
० ७	
१ ४	७ x २
१ ४	

कृती संपत नाही. याचा अर्थ ३२५३, १९नं विभाज्य नाही, किंवा १९, ३२५३चा अवयव नाही.

२. ३९७०१ ला २९ नं भाग जातो की नाही, ते पाहू.

३ ९ ७ ० १	इथं ३ हा गुणक
० ३	१ x ३
३ ९ ७ ३	
९	३ x ३
४ ० ६	
१ ८	६ x ३
५ ८	५८, २९ नं विभाज्य

● १३ चे कापरेकर प्रणीत मनोरंजक गुणधर्म

सर्कमफरन्स्, नेबरहूड, परपेंडिक्यूलर, अँटिलागरिथम्, ट्रिगनॉमेट्रिक इत्यादी गणितात ज्या संज्ञा पुष्कळ वेळा येतात त्यांचे इंग्रजी शब्दवर्ण (स्पेलिंग) १३ अक्षरी आहेत. हे विधान करून कापरेकर १३ संख्येच्या गमती देतात. पाश्चात्य संस्कृतीत १३ संख्या अभद्र किंवा अशुभ मानली जाते. ही बाब त्यांच्या मनात इतकी भिनली आहे की घरांचे किंवा हॉटेलातल्या खोल्यांचे क्रम टाकताना ११, १२ नंतर १३ वगळून एकदम १४च टाकतात. यदाकदाचित १३ क्रमांक असला तर पाश्चात्य माणूस त्या खोलीत शिरायला बिचकतो, असं ऐकतो.

आपल्या भारतीय संस्कृतीत मात्र १३ला असी सवतीची वागणूक दिलेली नाही. किंबहुना १३ अक्षरी एका नामजपाचा उल्लेख करता येतो. तो आहे, ''श्रीराम जयराम जयजयराम'' ह्या श्रीराम प्रभूंच्या जप मंत्राचा! इतकं पवित्र्य १३ भोवती तर आहेच. पण आपल्याकडं ज्या शुभतिथी दिलेल्या आहेत, त्यात त्रयोदशीचा अंतर्भाव आहे. उदाहरणार्थ, 'धनत्रयोदशी'!

आणखीन एक लक्षात आलेली बाब म्हणजे, खुद्द कापरेकरांच्या, 'दत्तात्रेय रामचंद्र कापरेकर' या संपूर्ण नावातच १३ अक्षरं आहेत!

कापरेकरांनी दिलेल्या १३च्या गमती अशा आहेत :

१३^{२} = १६९ अंक उलट करून ३१ लिहिल्यावर, ३१^{२} = ९६१. १३ व ३१ जशा एकमेकांच्या आरशातल्या प्रतिमा आहेत तसेच त्यांचे वर्ग १६९ व ९६१ हेही आहेत!

१३ एप्रिल १९८२ रोजी, 'मॅथेमॅटिकल अॅसोसिएशन ऑफ् इंडिया'च्या वतीनं, 'डेट विइथ मॅथेमॅटिशियन्स्'च्या निमित्तानं कापरेकरांचा सत्कार झाला. त्या दिवसाच्या १३ तारखेचं औचित्य साधून कापरेकरांनी १३चे पुढील गुणधर्म सांगून श्रोत्यांचं मनोरंजन केलं.

१३ = ३+२+८, (३२८)^{२} = १०७५८४, १०+ ७५ + ८४ = १६९ = १३^{२}

१३ = ४ + ० + ९, (४०९)^{२} = १६७२८१, १६ + ७२ + ८१ = १६९ = १३^{२}

१३ = ५ + २ + ६, (५२६)^{२} = २७६६७६, २७ + ६६ + ७६ = १६९ = १३^{२}

१३ = ७ + २ + ४, (७२४)^{२} = ५२४१७६, ५२ + ४१ + ७६ = १६९ = १३^{२}

१३ = ८ + २ + ३, (८२३)^{२} = ६७७३२९, ६७ + ७३ + २९ = १६९ = १३^{२}

१३ = ९ + २ + २, (९२२)^{२} = ८५००८४, ८५ + ८४ = १६९ = १३^{२}

याला जोडून ११३ घेतली तर, ११३^{२} = १२७६९ आणि तिची प्रतिमा ३११ घेतल्यावर, ३११^{२} = ९६७२१ हे वर्गदेखील एकमेकांच्या प्रतिमा येतात.

● कापरेकरांनी नमूद केलेल्या संख्याच्या आणखीन काही त्रोटक गमती

१. दुय्यम कापरेकर संख्या

अशा काही वर्ग संख्या आहेत की ज्या दुसऱ्या संख्यांच्या एक गटांची बेरीज करून काढता येतात. उदाहरणार्थ,

४४१^{२} = १९४४८१, १९ + ४४ + ८१ = १४४

४४०१^{२} = १९३६८८०१, १९ + ३६ + ८८ + ०१ = १४४

१२३^{२} = १५१२९, १५ + १२९ = १४४

२१०^{२} = ४४१००, ४४ + १०० = १४४

कापरेकरांनी न दिलेल्या या जातीच्या काही संख्या :

७८^{२} = ६०८४, ६० + ८४ = १४४

१०८^{२} = ११६६४, ११ + ६६ + ४ = ८१

१५६^{२} = २४३३६, ०२ + ४३ + ३६ = ८१

थोड्या फार श्रमानं आणि वेळ घालवून आपल्यालाही असा शोध घेता येईल.

२. कापरेकर स्थिरांक ६१४७च्या आश्चर्यकारक गमती

(i) १३ वेळा २ मध्ये ६१७४ व्यक्त करता येतो. पहा :

$$६१७४ = २ \text{ x } \left(२+\frac{२}{२}\right)^{२} \text{ x } \left(२+२+२+\frac{२}{२}\right)^{२+\frac{२}{२}}$$

$$= २ \text{ x } ९ \text{ x } ३४३$$

(ii) ६१७४ ही हर्षद संख्या म्हणून अशी व्यक्त करता येते.
६१७४ = १८ x ३४३

(iii) ६१७४चा ९९९९ पूरक काढा. तो येतो ३८२५.

या पूरकाचे अंक ६१७४ स्थिरांकाच्या पाठोपाठच्या अंकांदरम्यान क्रमानं लिहा. (स्थानीय किंमतींची संगती लक्षात घेऊन हे अंक घालायचे) यावरून ६३१८७२४५ ही संख्या मिळते.

ही संख्या उलट क्रमानं मांडा वा तिच्याच पुढं लिहा. म्हणजे
६३१८७२४५५४२७८१३६

या १६ अंकी संख्येचे चित्तवेधक गुणधर्म दृष्टोत्पत्तीस येतात.

(अ) ६३ + १८ + ७२ + ४५ = ५४ + २७ + ८१ + ३६ = १९८

(ब) ६३^{२} + १८^{२} + ७२^{२} + ४५^{२} = ११५०२ = ५४^{२} + २७^{२} + ८१^{२} + ३६^{२}

पहा : डावी बाजू ३९६९ + ३२४ + ५१८४ + २०२५ = ११५०२

आणि, उजवी बाजू = २९१६ + ७२९ + ६५६१ + १२९६ = ११५०२

पुढं कापरेकरांचा असा शेरा आहे की ३८२५ या ९९९९ पूरकाला ६१७४ च्या अंकांची अशीच किंवा स्थानीय किंमतींचा विचार न करता जोडणी केली तरी वरचीच रचना येते. आपण वरील प्रमाणेच जोडली तर ३६८१२७५४४५७२१८६३ ही संख्या आणि वर (अ) व (ब) मध्ये घेतलेल्या ६३, ---४५; ५४, ---३६ याच संख्या उलटक्रमानं येतात म्हणजे त्यांची किंवा त्यांच्या वर्गांची दोन गटात केलेली बेरीज १९८ व ११५०२ हीच अनुक्रमे येईल. मात्र स्थानीय किंमतींचा विचार न करता या संख्या जोडून येणाऱ्या १६ अंकी संख्येचे दोन गट करून अशीच प्रचिती घेऊन काय फळनिष्पत्ती होते, ते वाचकांनी पडताळून पहावं.

३. सर्व जागी ९ मिळवणं

उलट-वजा-उलट-बेरीज या प्रक्रियेनं एखादी संख्या घेऊन चार पायऱ्यात शेवटी सर्व जागी ९ कसे मिळवता येतात, ते कापरेकरांनी एक उदाहरणानं दाखवलं आहे.

उदा. १	: ७२४५१०६३५४	ही संख्या घेऊन प्रक्रिया करू.
	७२४५१०६३५४	
पायरी १	: ४५३६०१५४२७	मूळ संख्या उलट क्रमानं
पायरी २	: २७०९०९०९२७	वजाबाकी
पायरी ३	: ७२९०९०९०७२	पायरी २ मधील संख्येचा उलटक्रम
पायरी ४	: ९९९९९९९९९९	बेरीज करून सगळे ९ मिळाले.

उदा. २	: ८१६३१०७२५३	ही संख्या घेऊ.
	८१६३१०७२५३	
पायरी १	: ३५२७०१३६१८	मूळ संख्येचा उलट क्रम
पायरी २	: ४६३६०९३६३५	वजाबाकी
पायरी ३	: ५३६३९०६३६४	पायरी २चा उलटा क्रम
पायरी ४	: ९९९९९९९९९९	बेरजेनं सर्व जागी ९.

४. दिलेल्या गुणाकारावरून गुणाकार काढणे

समजा, ९१ x ८१९ = ७४५२९ हा गुणाकार घेऊ.

आता या गुणाकाराचे गुण्य, गुणक आणि उत्तर यात मूळसंख्यांच्या आधी व पुढं अंकांच्या मध्ये एक किंवा अधिक ९ व ० घालून नवे गुण्य, गुणक व त्याचप्रमाणं गुणाकाराचं उत्तर बनवून त्वरित प्रक्रिया संपते. पहा :

सुरुवात, ९१ x ८१९ = ७४५२९

प्रथम ९ व १ एकदा घेऊन	**९**९०**१** x **९**८०**१९९** = **९**७०४**९**५०२**९९**
आता हीच जोडी दोनदा घेऊन	**९९**९००**१** x **९९**८००**१९९९**
	= **९९**७००४**९९**५००२**९९९**

कोणत्या जागी किती ९ व शून्य घुसवले ते कळण्यासाठी अंक ठळक केले आहेत. वाचकांनी पर्यायी रीतींनी याचा पडताळा घ्यावा व आणखी अशा संख्या शोधाव्यात. १९२४ साली खालापूर या त्यांच्या खेड्यात कापरेकरांना ही इल्लम मिळाली!

४. संकीर्ण

● कापकेकरांच्या तर्किका (कापरेकर्स कंजक्चर्स)

गणिती जगताचं लक्ष वेधण्यासाठी व त्यावर विचारविमर्श करण्याकरिता कापरेकरांनी अभ्यासकांपुढं बऱ्याच तर्किका ठेवल्या आहेत. त्यापैकी काही महत्त्वाच्या इथं नमूद केल्यास अस्थानी ठरणार नाही.

१. अंकबेरीज श्रेणीत अनुक्रमानं येणाऱ्या ४ पेक्षा अधिक अविभाज्य संख्या असणं शक्य नाही.

२. ४५११३ संख्येत २ नं वाढ करून तिरप्या झेपेच्या प्रक्रियेनं मिळविलेल्या संख्यांची साखळी ९९९९९ (अबब!) पायऱ्यांनंतर पुन:पुन्हा येण्यास सुरुवात होते.

३. ज्या पूर्णांकी संख्येचा शेवट ००नं होतो आणि जिच्या अंकांची बेरीज, ४, १५, २६ किंवा ३७ आहे, ती स्वयंभू संख्या. अशी स्वयंभू संख्या ओळखायची कसोटी कापरेकरांनी दिली आहे. त्याबाबत प्रा. ए. एम. वैद्य यांनी अशी पूर्णांकी संख्या $१०^{११}$ पेक्षा लहान असली तरच ही कसोटी सत्य ठरते. परंतु १२ किंवा १२ पेक्षा जास्त अंकी संख्यांच्याबाबतीत ती फसते, असं यावर आपलं मत नोंदविलं.

४. जर कोणत्याही N संख्येचा शेवट ० (शून्यानं) नं होत असला तर N अधिक N च्या अंकांची बेरीज अधिक ९ ही मिळवणी करून स्वयंभू संख्या मिळते. मात्र ज्या संख्येच्या शेवटी दोन्ही स्थानात शून्य अथवा ९ येतात त्या संख्यांना ही कसोटी लागू पडत नाही.

● आवर्ती दशांशांची आवर्तनं (सायकल्स् ऑफ रिकरिंग डेसिमल्स्)

कापरेकरांनी 'आवर्ती दशांशांची आवर्तनं' हे पुस्तक दोन खंडात लिहिलेलं असून ते १९५० साली प्रसिद्ध होईपर्यंत भारतातच नव्हे तर परदेशातसुद्धा या विषयावर एकही पुस्तक निघालं नव्हतं. या विषयाचा सखोल अभ्यास करून, त्याच्या आंगोपांगांचा शोध घेऊन या नवनिर्मितीत कापरेकरांना जे निष्कर्ष मिळाले ते तरुण संशोधकांना नि:संशयपणं स्फूर्तिदायक ठरणारे आहेत. ह्या पुस्तकातील कोष्टकांचा उपयोग करून दशांशांचे बहुविध मनोरंजक गुणधर्म काढता येतात.

या पुस्तकाच्या अंतरंगाचा साररूपानं पुढीलप्रमाणं परिचय करून घेऊ.

१. ५नं शेवट होणाऱ्या संख्या वगळून, ३ ते २१३ पर्यंतचा सगळ्या विषम संख्यांच्या व्यस्तांकांच्या आवर्ती दशांशांची या पुस्तकात कोष्टकं ग्रथित केलेली आहेत. यादृच्छिक नमुना पाहणीत संख्याशास्त्रज्ञांना त्यांचा बहुमोल उपयोग होतो.

२. डेम्लो संख्यांच्या व्यस्तांकांच्या कालावधी संख्यांची विशिष्ट रचना इथं दिलेली आहे.

३. १८ अंकी कालावधी देणाऱ्या १/५६७ सारख्या कोणत्याही परिमेय अपूर्णांकांच्या उपविभाजित कालावधीच्या बेरजेबद्दलचे कुतूलहजनक संबंध नोंदवलेले आहेत.

४. कालावधी संख्यांचं अवयवीकरण केलेलं आहे.

५. ज्यावरून आपण आवर्ती अंक सहजपणं काढू शकू अशा १३ ते १३७०९ पर्यंतच्या अविभाज्य संख्यांचे त्यांच्या आवर्ती आवर्तनासह कोष्टकं दिलेली आहेत.

खरोखर विभिन्न अपूर्णांकांच्या दशांशांच्या रचनेबद्दल काही जुनी, काही नवीन, कुतूहलपूर्ण, खळबळजनक अशा अंकगणितीय माहितीचा खजिनाच या पुस्तकात एकत्रित केलेला आहे. मुख्य म्हणजे ह्या पुस्तकात विवेचन केलेला विषय समजण्यास सुलभ असून तो पदवीपूर्व पातळीपर्यंत गणिताचा अभ्यास केलेल्या वाचकांच्या आटोक्यात राहील, असा आहे.

५. जादूचे चौरस

कापरेकरांनी आपल्या कल्पकतेनं षटकोन, अष्टकोन, पंचकोनी चांदणी या आकृत्यांतून उचित संख्या भरून त्या सगळ्या संख्यांची एक पेक्षा अधिक वेळा बेरीज करून उत्तरात मात्र एकच संख्या काढलेली आहे. विशेषत: त्यांच्या काही जादूच्या चौरसांना खास प्रसंगांची पार्श्वभूमी आहे. त्यापैकी नमूद करण्यासारखे म्हणजे :

१. थोर खगोलशास्त्रज्ञ कोपर्निकस याची ५वी जन्मशताब्दी १९ फेब्रुवारी १९७३ ला येत होती. तेव्हा चाणाक्षपणे कापरेकरांनी १९, २, ७३ आणि ५०० हे आकडे पहिल्या रांगेत घेऊन त्यांच्या स्तंभात इतर सोयिस्कर अंक भरून ४ x ४ चा जादूचा चौरस तयार करून त्या आकड्यांची २२ निरनिराळ्या प्रकारे बेरीज करून ५९४च काढली आहे. 'हा विलक्षण जादूचा चौरस नाही का?' असा कापरेकरांनी नेहमीप्रमाणं प्रश्न केला आहे.

२. नंतर त्यांनी केलेल्या चौरसांपैकी ज्या दोघांचा उल्लेख करणं आवश्यक आहे ते म्हणजे (अ) त्यांचे गुरु रँ. र. पु. परांजपे यांच्या ८६व्या वाढदिवशी म्हणजे १६-२-१९६२ या दिवशी, १६, २, १९, ६२, ८६ असे पाच आकडे पहिल्या रांगेत घेऊन ५ x ५चा १८५ बेरजेचा जादूचा चौरस तयार करून रँग्लर साहेबांना नजर केला, तेव्हा अप्पासाहेब परांजपे यांनी कापरेकरांच्या गणिती धडपडीला मन:पूर्वक आशीर्वाद दिला! (ब) १५ ऑगस्ट १९४७ रोजी भारत स्वतंत्र देश झाला. त्या शुभप्रसंगीदेखील त्यांनी ४ x ४ चा चौरस करून त्यांची बेरीज जी ८९ आली तिची संगती १८५७ साली स्वातंत्र्यसंग्राम सुरू होऊन तो १९४६ साली पुरा झाला. या दोन्ही वर्षांतला फरक ८९ येतो. इकडं लक्ष वेधलं आहे. बेरीज २०

प्रकारं करता येते. शिवाय ८९ ही अविभाज्य संख्या असल्याचा कापरेकरांनी मुद्दाम शेरा मारला आहे.

३. **म. गांधी जन्मशताब्दी चादूचा चौरस :** दरवर्षी २ ऑक्टोबर हा दिवस भारतीय स्वातंत्र्य चळवळीचे अग्रणी महात्मा गांधी यांची जयंती म्हणून देशात साजरा केला जातो. १९६९ सालच्या २ ऑक्टोबरचं महत्त्व मात्र काहीसं विशेष होतं. कारण त्या दिवशी महात्माजींची जन्मशताब्दी येत होती. या दिवसाचं आगळं महत्त्व जाणून संबंध भारतातील अनेक संस्था, व्यक्ती आणि केंद्र व राज्य सरकारांनी ह्या थोर देशभक्ताला आदरांजली वाहण्यासाठी विविध कार्यक्रम आखले होते. ह्यात पं. कुमार गंधर्वांसारख्या आघाडीच्या गायकानं, 'गांधी मल्हार' रागाची रचना करून आपल्या मैफलित तो गाऊन कलेच्या माध्यमातून गांधीजांना श्रद्धांजली वाहिली. तशीच ती कापरेकरांनी, आपल्या गणिती कौशल्यानं वाहिली. महात्माजींच्या जन्मशताब्दीची तारीख, महिना, सन आणि वर्ष लक्षात घेऊन त्यांनी एक जादूचा चौरस रचला. वरील सर्व संख्यांची बेरीज : ०२-१०-१९-६९ = १०० येते, हे प्रथम कापरेकरांच्याच ध्यानात आलं, आणि मग त्यांनी पुढील प्रमाणं जन्मशताब्दी चौरस रचून गणिताच्या माध्यमानं गांधीजींना आदरांजली वाह्यली :

०२	१०	१९	६९
६४	२४	१२	००
१६	०१	६३	२०
१८	६५	०६	११

या चौरसात आकडे भरताना त्यांनी शून्याला ही स्थान दिलेलं आहे; आणि ह्या चौरसात भरलेल्या आकड्यांची बेरीज निरनिराळ्या २२ प्रकारं केली तरी ती १००च होते!

६. कापरेकर जन्मशताब्दी जादूचा चौरस

या जादूच्या चौरसांची खुद्द कापरेकर यांच्यापासून स्फूर्ती घेऊन प्रस्तुत लेखकांनं १७ जानेवारी २००५ रोजी येणाऱ्या कापरेकरांच्या जन्मशताब्दी निमित्त पुढीलप्रमाणं ४ x ४चा जादूचा चौरस रचला आहे.

१७	२०	०५	१००
१०१	०४	२३	१४
२१	१६	९९	०६
०३	१०२	१५	२२

ह्या चौरसाच्या पहिल्यारांगेत जानेवारी महिन्याचा १ आकडा घेतलेला नाही. म्हटलं तर त्यांच्या १७ या 'जन्म दिवसाच्या आकड्यात १ आहेच. या सर्व अंकाची ४ रांगा, ४ स्तंभ, २ विकर्ण या १० घरातल्या घटकांची बेरीज १४२ येतेच. पण आणखी १४ वेळा अशी ४/४ घटकांची बेरीज घेतली असता या चौरसा पासून एकूण २४ प्रकारं १४२ ही बेरीज मिळवता येते. या १४२ ची संगती अशी लावता येते :

जन्मशताब्दी सालातल्या म्हणजे २००५च्या २० आणि ५ यांचा गुणाकार

२० x ५ = १०० (i)

आणि त्याच २० आणि ५ची बेरीज जन्म दिनांकात मिळवली तर

२० + ५ + १७ = ४२ (ii)

∴ (i) + (ii) = १४२, जादूच्या चौरसात येणारी बेरीज.

संदर्भ

१. थर्टीन कट्स् इन् कॅलक्युलेशन्स् - द. रा. कापरेकर प्रसिद्धी १७.१.१९३५

२. डेम्लो नंबर्स खंड १ला - द. रा. कापरेकर प्रसिद्धी १.६.१९३५

३. सायकल्स् ऑफ रिकरिंग डेसिमल्स् द. रा. कापरेकर १५.९.१९५०

४. द. न्यू कॉन्स्टंट ६१७४ - कापरेकर स्थिरांक - द. रा. कापरेकर १०.८.१९५९

५. पझल्स् ऑफ सेल्प नंबर्स - द. रा. कापरेकर १९५९.

६. द मॅथिमॅटिक्स् टीचर्स ॲसोसिएशन. व्हॉल्युम २० नंबर्स १ते४, १९८४

७. सम् एमिनंट इंडियन मॅथेमॅटिशियन्स् ऑफ् टेवं्टिएथ सेंचरी - भाग ४ संपादक : जे. एन्. कपूर

८. कापरेकर गणिताचे विश्व - क्रिएटिव्ह ग्रुप नाशिक (नि. म. शहाणे)

९. गंमत गणिताची - दि. कृ. गोटखिंडीकर

१०. गणितधारा - प्रा. रा. भा. शेणवी खांडेपारकर, गोवा.